The Project Gutenberg EBook of Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, by
Isaac Newton

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with
almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or
re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included
with this eBook or online at www.gutenberg.org

Title: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Author: Isaac Newton

Release Date: March 1, 2009 [EBook #28233]

Language: Latin

*** START OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK PHILOSOPHIAE NATURALIS ***

Produced by Jonathan Ingram, Keith Edkins and the Online
Distributed Proofreading Team at http://www.pgdp.net

Transcriber's note:

A few typographical errors have been corrected. They appear in the text like this, and the explanation will appear when the mouse pointer is moved over the marked passage.

{Braces} are inserted by the Transcriber to clarify the meaning of maths expressions. Overlining is the method of grouping used in the

original.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA

Autore *IS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

a Serenissimo

REGE CAROLO II.

AD

PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET AUSPICIIS

POTENTISSIMI MONARCHÆ

JACOBI II.

FLORENTI.

Tractatum hunc humillime *D.D.D.*

IS. NEWTON.

PRÆFATIO

AD

LECTOREM.

Cum Veteres Mechanicam *(uti Author est* Pappus*) in verum Naturalium investigatione maximi fecerint, & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu* Mathesin *excolere quatenus ea ad* Philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres constituerunt:* Rationalem *quæ per Demonstrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utiq;* Mechanica *nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas describere* Geometria *non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ*; dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & circulos describere Problemata sunt sed non Geometrica. Ex* Mechanica *postulatur horum solutio, in* Geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam* Mechanicæ universalis *pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem,* Mechanica *ad motum vulgo reseratur. Quo sensu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunq; resultant, & virium quæ ad motus quoscunq; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per*

potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deq; potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, levitatem, vim Elasticam, resistentiam Fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et ea propter hæc nostra tanquam Philosophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a Phænomenis motuum investigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et hac spectant Propositiones generales quas Libro primo & secundo pertractavimus. In Libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cælestibus, per Propositiones in Libris prioribus Mathematice demonstratas, derivantur vires gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuo impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philosophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic posita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec solum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, sed etiam Author fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a me figuram Orbium cælestium impetraverat, rogare non destitit ut eadem cum* Societate Regali *communicarem, Quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At postquam Motuum Lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cæpissem quæ ad leges mensuras Gravitatis & aliarum virium, ad figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in Mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares spectant, (imperfecta cum sint,) in Corollariis Propositionis* LXVI. *simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore*

quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum Propositionum interrumpere. Nonnulla sero inventa locis minus idoneis inserere malui, quam numerum Propositionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, enixe rogo.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

D. ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Sæculi Gentisque nostræ Decus egregium.

En tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus atque Jovis; quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens Leges violare Creator
Noluit, æternique operis fundamina fixit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ Vis circumrotat Orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula Gyris.
Jam patet horrificis quæ sit via flexa Cometis;
Jam non miramur barbati Phænomena Astri.
Discimus hinc tandem qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.

Discimus & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellit, dum fractis fluctibus Ulvam
Deserit, ac Nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.
Quæ toties animos veterum torsere Sophorum,
Quæque Scholas frustra rauco certamine vexant
Obvia conspicimus nubem pellente Mathesi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error
Queis Superum penetrare domos atque ardua Cœli
Scandere sublimis Genii concessit acumen.

Surgite Mortales, terrenas mittite curas
Atque hinc cœligenæ vires dignoscite Mentis
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui scriptis jussit Tabulis compescere Cædes
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdare mœnibus Urbes
Autor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen pressit ab Uva;
Vel qui Niliaca monstravit arundine pictos
Consociare sonos, oculisque exponere Voces;
Humanam sortem minus extulit; utpote pauca
Respiciens miseræ solummodo commoda

vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cœcæ
Claustra patent Terræ rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt sæcula mundi.

Talia monstrantem mecum celebrate Camænis,
Vos qui cœlesti gaudetis nectare vesci,
NEWTONVM clausi reserantem scrinia Veri,
NEWTONVM Musis charum, cui pectore puro
Phœbus adest, totoque incessit Numine mentem:
Nec fas est propius Mortali attingere Divos.

EDM. HALLEY.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

Principia

MATHEMATICA.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

Aer duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunq; diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusq; pondus. Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

Def. II.

Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis, adeoq; in corpore duplo majore æquali cum Velocitate duplus est, et dupla cum Velocitate quadruplus.

Def. III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodq;, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neq; differt quicquam ab inertia Massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta, estq; exercitium ejus sub diverso respectu et Resistentia et Impetus: Resistentia quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; Impetus quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus Resistentiam quiescentibus et Impetum moventibus tribuit; sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem, neq; semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

Def. IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neq; post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

Def. V.

Vis centripeta est qua corpus versus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunq; tendit.

Hujus generis est gravitas, qua corpus tendit ad centrum Terræ: Vis magnetica, qua ferrum petit centrum Magnetis, et vis illa, quæcunq; sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Est autem vis centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix et motrix.

Def. VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Uti virtus Magnetica major in uno magnete, minor in alio.

Def. VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus Magnetis ejusdem major in minori Distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in Vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium (ut experimento pendulorum constat) atq; adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a Terra; in æqualibus autem distantiis eadem undiq; propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Def. VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inq; corpore eodem majus prope terram, minus in cælis. Hæc vis est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum & (ut ita dicam) pondus, & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires absolutas, acceleratrices & motrices, & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium: Nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex propensionibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis Magneticæ vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus saltem est hic conceptus. Nam virium causas & sedes physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem Materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta Superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritq; semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulsus vel propensionis cujuscunq; in centrum, indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed Mathematice tantum considerando. Unde caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo in sensu in sequentibus accipiendæ sunt, explicare visum est. Nam tempus, spatium, locum et motum ut omnibus notissima non definio. Dicam tamen quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipit. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, Mathematicas et vulgares distingui.

I. Tempus absolutum verum & Mathematicum, in se & natura sua absq; relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioq; nomine dicitur Duratio; relativum apparens & vulgare est sensibilis & externa quævis Durationis per motum mensura, (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium absolutum natura sua absq; relatione ad externum quodvis semper manet similare & immobile; relativum est spatii

hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aerei vel cælestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine, sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, movetur, spatium Aeris nostri quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus, & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estq; pro ratione spatii vel absolutus vel relativus. Partem dico spatii, non situm corporis vel superficiem ambientem. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neq; tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de ipsius loco eadem cum summa translationum partium de locis suis, adeoq; locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in Navi quæ velis passis fertur, relativus corporis locus est navis regio illa in qua corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæq; adeo movetur una cum Navi; & Quies relativa est permansio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At Quies vera est permansio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua Navis ipsa una cum cavitate sua & contentis universis movetur. Unde si Terra vere quiescit, corpus quod relative quiescit in Navi, movebitur vere et absolute ea cum Velocitate qua Navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur, orietur verus et absolutus corporis motus partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex Navis motu relativo in Terra; et si corpus etiam movetur relative in Navi, orietur verus ejus motus partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum Navis in Terra, tum corporis in Navi, et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa ubi Navis versatur moveatur vere in Orientem, cum Velocitate partium 10010, et velis ventoq; feratur Navis in Occidentem cum Velocitate partium decem, Nauta autem ambulet in Navi Orientem versus cum Velocitatis parte una,

movebitur Nauta vere et absolute in spatio immoto cum Velocitatis partibus 10001 in Orientem, et relative in Terra Occidentem versus cum Velocitatis partibus novem.

Tempus absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Æquationem Temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro Mensura Temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi ut ex veriore Tempore mensurent motus cælestes. Possibile est ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus Temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiæ rerum, sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli; proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex ijsdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii oscillatorii, tum etiam per Eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam Tempora & Spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum Essentia est ut sint loca, & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta loca, & solæ translationes de his locis sunt absoluti motus.

Verum quoniam hæ spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui, earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantiis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa; deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusq; referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per eorum proprietates, causas & effectus. Quietis proprietas est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoq; cum possibile sit ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad

invicem in regionibus nostris, utrum horum aliquod ad longinquum illud datam positionem servet, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Igitur motis corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus et absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros, et sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur; sunt enim ambientia ad inclusa ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absq; translatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur una locatum, adeoq; corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Igitur motus omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum et absolutorum, et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, et motu loci hujus de loco suo, et sic deinceps, usq; dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri et absoluti non nisi per loca immota definiri possunt, et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli: Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem, atq; adeo semper manent immota, spatiumq; constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari et mutari potest absq; viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut ijs cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursus motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur, at motus

relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in qua motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur; et propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturq; perpetuo in orbem donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aqua, et una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu: superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis, at postquam, vi in aquam paulatim impressa, effecit vas, ut hæc quoq; sensibiliter revolvi incipiat, recedet ipsa paulatim e medio, ascendetq; ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) et incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum & innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuiq; relativo hic omnino contrarius. Initio ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Postea vero ut aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe, atq; hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative. Igitur conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusq; revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens; motus autem relativi pro varijs relationibus ad externa innumeri sunt, & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus de vero illo & unico motu participant. Unde & in Systemate eorum qui Cælos nostros infra Cælos fixarum in orbem revolvi

volunt, & Planetas secum deferre; Planetæ & singulæ Cælorum partes, qui relative quidem in Cælis suis proximis quiescunt, moventur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaq; cum cælis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatij, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus si quantitates mensuratæ hic subintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris literis qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neq; minus contaminant Mathesin & Philosophiam qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quod partes spatij illius immobilis in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur, id est facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile, quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex

relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum & inveniretur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus & apparentibus differentijs colligere, & contra, ex motibus seu veris seu apparentibus, eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

AXIOMATA

SIVE

LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa suerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam &

equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; distentus eodem relaxandi se conatu urgebit Equum versus lapidem, ac lapidem versus equum, tantumq; impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunq; mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum sed motuum, (scilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Figure for Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi sola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* sive vis *N* imprimatur, sive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriusq; lineæ concursu *D* reperiri necesse est.

Corol. II.

Et hinc patet compositio vis directæ AD *ex viribus quibusvis obliquis* AB & BD, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* AD *in obliquas quascunq;* AB & BD. *Quæ quidem Compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*

Figure for Corol. II.

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radij inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroq; *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallela sit *AC* & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa sint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est idem atq; pondus *P*, quod sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt & sic consistent in æquilibrio: (quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis & Axis in Peritrochio:) sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus *p* ponderi *P* æquale partim suspendatur silo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, posterior plano *pG* perpendicularis; & si vis ponderis *p* deorsum tendens, exponatur per lineam *pH*, resolvi potest hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare esset planum aliquod *pQ* secans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *pN*, *HN* perpendiculariter, nimirum planum *pQ* vi *pN* & planum *pG* vi *HN*. Ideoque si tollatur planum *pQ* ut pondus tendat filum, quoniam filum sustinendo pondus, jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eadem vi *pN*, qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut *pN* ad *pH*. Ideoq; si pondus *p* sit ad pondus *A* in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum *AM*, *pN* a centro rotæ, & ratione directa *pH* ad *pN*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atq; adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem *p* planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei &

mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *pQ* sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam *pH* in plano, ut *pN* ad *pH*; atq; ad vim qua urget planum alterum *pG* ut *pN* ad *NH*. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur Corollarij hujus latissime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Authoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, radijs volubilibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascendentibus, cæterisq; potentijs Mechanicis componi solent, ut & vires Nervorum ad animalium ossa movenda.

Corol. III.

> *Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.*

Etenim actio eiq; contraria reactio æquales sunt per Legem 3, adeoq; per legem 2, æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusq;, adeoq; differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum *A* sit triplo majus corpore sphærico *B*, habeatq; duas velocitatis partes, et *B* sequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, adeoq; motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B* ut sex ad decem; ponantur motus illis esse partium sex & decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinq; corpus *B* amittet partes totidem, adeoq; perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim; & *B* cum partibus septem vel sex vel quinq; existente semper summa partium sexdecim ut prius. Sin corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoq; progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim; corpus *B* amittendo, tot partes quot *A* lucratur, vel progredietur cum una

parte, amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel regredietur cum una parte amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atq; ita summæ motuum conspirantium 15 + 1 vel 16 + 0, differentiæ contrariorum 17 - 1 & 18 - 2 semper erunt partium sexdecim ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusq; velocitas ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem ut motus post ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem; partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem, cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus; dein corporis utriusq; motus (per Corol. 2.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atq; antea, & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

Corol. IIII.

Commune gravitatis centrum ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis, & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis

& distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescet vel progredietur uniformiter in linea recta, Hoc postea in Lemmate xxiii demonstratur in plano, & eadem ratione demonstrari potest in loco solido. Ergo si corpora quotcunq; moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis, vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data: similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem, alijsq; omnibus in se extrinsecus impressis, omnino vacant, adeoq; moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusq; a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atq; adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur, a communi corporum omnium centro, in partes summis totalibus corporum, quorum sunt centra, reciproce proportionales, adeoq; centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum; manifestum est quod commune illud omnium centrum, ob actiones binorum corporum inter se, nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones

omnes corporum inter se, vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ, & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel Quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum, nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

Corol. V.

Corporum dato spatio inclusorum ijdem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum absq; motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroq; casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 2 æquales erunt congressuum effectus in utroq; casu, & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

Corol. VI.

Si corpora moveantur quomodocunq; inter se & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt (per Legem 2.) adeoq; nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium

Figure for Corol. VI.

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & Corollaria duo prima adinvenit *Galilæus* descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in Parabola, conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. Ab ijsdem Legibus & Corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium Pendulorum, suffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his ijsdem & Lege tertia *D. Christopherus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius S.T.D.* & *D. Christianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile Principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim adinvenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes; Et primus quidem *D. Wallisius* dein *D. Wrennus* & *D. Hugenius* inventum prodidit. Sed & veritas comprobata est a *D. Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum, quod etiam *Clarissimus Mariottus* Libro integro exponere mox dignatus est. Verum ut hoc experimentum cum Theorijs ad amussim congruat, habenda est ratio tum resistentiæ aeris, tum etiam vis Elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A*, *B* filis parallelis *AC*, *BD* a centris *C*, *D*. His centris & intervallis describantur semicirculi *EAF*, *GBH* radijs *CA*, *DB* bisecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (subducto corpore *B*) demittatur inde, redeatq; post unam oscillationem ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, & hæc exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Restituatur corpus *B* in locum suum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, absq; errore sensibili, tanta erit ac si in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chorda arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*, a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *st* pars

quarta ipsius *rv* sita in medio, & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *TA* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem, deinde in chordam arcus *tA* ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcus *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusq; tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idq; in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, duodecim vel sexdecim concurrerent, reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant quod in partes contrarias mutatio motus erat corpori utriq; illata, atq; adeo quod actio & reactio semper erant æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus, corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex & redibat *A* cum duabus, redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim & restabit nihil; subducantur aliæ partes duæ & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, fiunt partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim & *B* tardius cum partibus quinq; & post reflexionem pergebat *A* cum quinq; partibus, pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex summa motuum conspirantium & differentia contrariorum colligebatur. Namq; errorem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accurate. Difficile erat tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in

loco infimo *AB*, tum loca *s*, *k*, notare ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis pilis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat Regulam ad quam probandam inventum est hoc experimentum præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si conditio illa in corporibus non perfecte duris tentanda est, debebit solummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elasticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenij* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus. Certius id affirmabitur de perfecte Elasticis. In imperfecte Elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi Elastica; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatq; corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ sit ad relativam velocitatem concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter constricta sic tentavi. Primum demittendo Pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore. In vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atq; hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A* quam pressione corporis *B*; proindeq; non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietq; systema corporum duorum & obstaculi moveri in directum in partes versus *B*, motuq; in spatiis liberis semper accelerato abire in infinitum. Quod est absurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit systema

perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeq; corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aqua stagnante juxta fluitent, neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinq; sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ: sic in movendis Instrumentis Mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oscillante Libra, sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera, si recta ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt reciproce ut punctorum a quibus suspenduntur distantiæ ab axe Libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt oblique, æquipollent quæ sunt ut ascensus & descensus quatenus facti secundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochlea seu Polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ sit ad pondus vel directe vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissus constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum si sunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus est ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas Manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam Cochleæ versus corpus pressum. Vires quibus cuneus urget partes duas ligni fissi est ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema; *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi data superandi. Nam si Machinæ ita

formentur ut velocitates Agentis & Resistentis sint reciproce ut vires, Agens resistentiam sustinebit, & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistentia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus Machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere quam late pateat, quamq; certa sit Lex tertia motus. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & Resistentis reactio ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM

Liber PRIMUS

SECT. I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore constanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales.

Si negas, sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

Lemma II.

Figure for Lemma II.

Si in figura quavis AacE *rectis* Aa*,* AE*, & curva* acE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq;* Ab*,* Bc*,* Cd*, &c. sub basibus* AB*,* BC*,* CD*, &c. æqualibus, & lateribus* Bb*,* Cc*,* Dd*, &c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl*,* bLcm*,* cMdn*, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD*, circumscripta* AalbmcndoE*, & curvilinea* AabcdE*, sunt rationes æqualitatis.*

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl* + *Lm* + *Mn* + *Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum summa *Aa*, id est rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo

ejus *AB* in infinitum minuitur, sit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

Lemma III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscripta, at latitudine sua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum.

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea quæ tangentibus eorundem arcuum circumscribitur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

Lemma IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitq; idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuitur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*

Figure for Lemma IV.

Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura

ad figuram; existente nimirum figura priore (per Lemma III.) ad summam priorem, & posteriore figura ad summam posteriorem in ratione æqualitatis.

Corol. Hinc si duæ cujuscunq; generis quantitates in eundem partium numerum utcunq; dividantur, & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam cæteræq; suo ordine ad cæteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atq; adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

Lemma V.

> *Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicata ratione laterum.*

Lemma VI.

Figure for Lemma VI.

> *Si arcus quilibet positione datus* AB *subtendatur chorda* AB*, & in puncto aliquo* A*, in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinq; producta* AD*; dein puncta* A, B *ad invicem accendant & coeant; dico quod angulus* BAD *sub chorda & tangente contentus minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*

Nam producatur *AB* ad *b* & *AD* ad *d*, & punctis *A*, *B* coeuntibus, nullaq; adeo ipsius *Ab* parte *AB* jacente amplius intra curvam, manifestum esi quod hæc recta *Ab*, vel coincidet cum tangente *Ad*, vel ducetur inter tangentem & curvam. Sed casus posterior est contra naturam Curvaturæ, ergo prior obtinet. *Q. E. D.*

Lemma VII.

Iisdem positis, dico quod ultima ratio arcus, chordæ & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis. Vide Fig. *Lem. 6 & 8 vi.*

Nam producantur *AB* & *AD* ad *b* & *d* secanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitq; arcus *Ab* similis arcui *AB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma superius, evanescet; adeoq; rectæ *Ab*, *Ad* arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *AB* rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1.

Corol. 1. Unde si per *B* ducatur tangenti parallela *BF* rectam quamvis *AF* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc ultimo ad arcum evanescentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD*, rationem semper habet æqualitatis ad *AD*.

Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, secantes tangentem *AD* & ipsius parallelam *BF*, ratio ultima abscissarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæq; & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma VIII.

Figure for Lemma VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* AB*, chorda* AB *& tangente* AD*, triangula tria* ARB, ARB, ARD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam producantur *AB*, *AD*, *AR* ad *b*, *d* & *r*. Ipsi *RD* agatur parallela

rbd, & arcui *AB* similis ducatur arcus *Ab*. Coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, suntq; eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

Corol. Et hinc triangula illa in omni de rationibus ultimis argumentatione pro se invicem usurpari possunt.

Lemma IX.

Figure for Lemma IX.

> *Si recta* AE *& Curva* AC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, EC, *curvæ occurrentes in* B, C; *dein puncta* B, C *accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ADB, AEC *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*

Etenim in *AD* producta capiantur *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ & proportionales. Producatur *AC* ad *c*, ducatur curva *Abc* ipsi *ABC* similis, & recta *Ag* tangatur curva utraq; in *A*; & secantur ordinatim applicatæ in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*, & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*, adeoq; per Lemma V, erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Lemma X.

> *Spatia, quæ corpus urgente quacunq; vi regulari describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.*

Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*, & spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus æqualibus in partibus istis ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur a locis figurarum, ad quæ corpora temporibus ijsdem proportionalibus absq; viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Lemma XI.

Subtensa evanescens anguli contactus est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.

Figure for Lemma XI.

Cas. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, subtensa arcus *AB*. Huic subtensæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitq; *J* intersectio linearum *BG*, *AG* ultimo facta ubi puncta *D*, *B* accedunt usq; ad *A*. Manifestum est quod distantia *GJ* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *ABG*, *Abg* transeuntium) *AB quad.* æquale *AG* × *BD* & *Ab quad.* æquale *Ag* × *bd*, adeoq; ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* componitur ex rationibus *AG* ad *Ag* & *BD* ad *bd*. Sed quoniam *JG* assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio *AG* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* æqualis rationi ultimæ *BD* ad *bd*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, adeoq; eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, tamen anguli *D*, *d* ad

æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ *BD*, *bd* in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab* & eorum sinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. Triangula rectilinea *ADB*, *Adb* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *AD*, *Ad*, inq; sesquiplicata laterum *DB*, *db*: Utpote in composita ratione laterum *AD* & *DB*, *Ad* & *db* existentia. Sic & triangula *ABC*, *Abc* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *BC*, *bc*.

Corol. 3. Et quoniam *DB*, *db* sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum *AD*, *Ad*; erunt areæ ultimæ curvilineæ *ADB*, *Adb* (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*, & segmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum *AJ* finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest *DB* ut AD^3: quo in casu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci potest, proindeq; angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat *DB* successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat *DB* successive ut AD^2, $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, $AD^{7/6}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinq; in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{8/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$, &c. Et

rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neq; novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deq; superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Præmisi vero hæc Lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium Hypothesis; & propterea Methodus illa minus Geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasq; nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere, & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui breuitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium, & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi, vimq; talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum pergentis velocitatem ultimam. Hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attigit, nullam esse. Et responsio facilis est. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neq; antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neq; postea, sed tunc cum attingit, id est illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium

incipientium & cessantium. Cumq; hic limes sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines; & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neq; prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum imaginationi consulens, dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Figure for Prop. I.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*, adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, consectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta *Bc* deflectere & pergere in recta *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC* occurrens *BC* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. I) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ in eodem plano, & triangulum *SCD* triangulo *SBC* & *SDE* ipsi *SCD* & *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter *ADF*, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva; adeoq; vis centripeta qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. In mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus

proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum.

Corol. 2. In mediis omnibus, si arearum descriptio acceleratur, vires non tendunt ad concursum radiorum, sed inde declinant in consequentia.

Pro. II. Theor. II.

Corpus omne quod, cum movetur in linea aliqua curva, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem. (per Leg. I.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD* &c. circa punctum immobile *S*, temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco *B* secundum lineam parallelam ipsi *cC* (per Prop. 40 Lib. I Elem. & Leg. II.) hoc est secundum lineam *BS* & in loco *C* secundum lineam ipsi *dD* parallelam, hoc est secundum lineam *CS*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est sive quiescat superficies in qua corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem una cum corpore, figura descripta & puncto suo *S* uniformiter in directum.

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem, hæc faciet corpus deflectere a plano sui motus, sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

Prop. III. Theor. III.

Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunq; moti ducto, describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum & ex vi omni acceleratrice, qua corpus alterum urgetur.

Nam (per Legum Corol. 6.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum urgetur, urgeatur corpus utrumq; secundum lineas parallelas, perget corpus primum describere circa corpus alterum areas easdem ac prius: vis autem qua corpus alterum urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam, & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, & corpus primum, urgente differentia virium, perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum describere. Tendit igitur (per Theor. 2.) differentia virium ad corpus illud alterum ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum radio ad alterum ducto describit areas temporibus proportionales, atq; de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur; vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum ut centrum.

Corol. 2. Et si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus radio ad alterum corpus ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quiescit vel movetur uniformiter in directum; actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visq; tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur, circum quod æquabilis est arearum descriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunq; movetur, si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

Scholium

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est centri quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, corpus autem vi ad hoc centrum tendente retinetur in orbita sua, & motus omnis circularis recte dicitur circa centrum illud fieri, cujus vi corpus retrahitur de motu rectilineo & retinetur in Orbita: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut Indicem centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

Prop. IV. Theor. IV.

Corporum quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere, & esse inter se ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Figure for Prop. IV.

Corpora *B*, *b* in circumferentiis circulorum *BD*, *bd* gyrantia, simul describant arcus *BD*, *bd*. Quoniam sola vi insita describerent tangentes *BC*, *bc* his arcubus æquales, manifestum est quod vires centripetæ sunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atq; adeo hæ sunt ad invicem in ratione prima spatiorum nascentium *CD*, *cd*: tendunt vero ad centra circulorum per Theor. II, propterea quod areæ radiis descriptæ ponuntur temporibus proportionales. Fiat figura *tkb* figuræ *DCB* similis, & per Lemma V, lineola *CD* erit ad lineolam *kt* ut arcus *BD* ad arcum *bt*: nec non, per Lemma XI, lineola nascens *tk* ad lineolam nascentem *dc* ut *bt quad.* ad *bd quad.* & ex æquo lineola nascens *DC* ad lineolam nascentem *dc* ut $BD \times bt$ ad *bd quad.* seu quod perinde est, ut $BD \times bt \div Sb$ ad *bd quad.* $\div\, Sb$, adeoq; (ob æquales rationes $bt \div Sb$ & $BD \div SB$) ut *BD quad.* $\div\, SB$ ad *bd quad.* $\div\, Sb$ *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Corol. 2. Et reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad radios ita sunt hæ vires inter se. Id est (ut cum Geometris loquar)

hæ vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse: necnon in ratione composita ex ratione simplici radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde si tempora periodica æquantur, erunt tum vires centripetæ tum velocitates ut radii, & vice versa.

Corol. 4. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut radii, vires centripetæ sunt æquales, & velocitates in dimidiata ratione radiorum: Et vice versa.

Corol. 5. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut quadrata radiorum, vires centripetæ sunt reciproce ut radii, & velocitates æquales; Et vice versa.

Corol. 6. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut cubi radiorum, vires centripeta: sunt reciproce ut quadrata radiorum; velocitates autem in radiorum dimidiata ratione: Et vice versa.

Corol. 7. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunq; similium, centraq; similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata.

Scholium.

Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cælestibus (ut seorsum colligerunt etiam nostrates *Wrennus, Hookius & Halleus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicata ratione distantiarum a centris decrevi fusius in sequentibus exponere.

Porro præcedentis demonstrationis beneficio colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam cum vis illa, quo tempore corpus percurrit arcum *BC*, impellat ipsum per spatium *CD*, quod ipso motus initio æquale est quadrato arcus illius *BD* ad circuli diametrum applicato; & corpus omne vi eadem in eandem semper plagam continuata, describat spatia in duplicata ratione temporum: Vis illa, quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum describit, efficiet ut corpus idem recta progrediens describat spatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale; adeoq; est ad vim gravitatis ut spatium

illud ad spatium quod grave cadendo eodem tempore describit. Et hujusmodi Propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu de Horologio oscillatorio, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quotcunq; Et si corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas, adeoq; summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim, hoc est (si Polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli, id est ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoq; si Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis qua corpus urget circulum, & huic æqualis est vis contraria qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

Prop. V. Prob. I.

Figure for Prop. V.

Data quibuscunq; in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC*, velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R* a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est ita ut sit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentia in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

Nam cum corpus in *P* & *Q* radiis ad centrum ductis areas describat temporibus proportionales, sintq; areæ illæ simul descriptæ ut velocitates in *P* & *Q* ductæ respective in perpendicula a centro in tangentes *PT*, *QT* demissa: Erunt perpendicula illa ut velocitates

reciproce, adeoq; ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*

Pro. VI. Theor. V.

Si corpus P *revolvendo circa centrum* S, *describat lineam quamvis curvam* APQ, *tangat vero recta* ZPR *curvam illam in puncto quovis* P, *& ad tangentem ab alio quovis curvæ* Q *agatur* QR *distantiæ* SP *parallela, ac demittatur* QT *perpendicularis ad distantiam* SP: *Dico quod vis centripeta sit reciproce ut solidum* SP quad. $\times$ QT quad. $\div$ QR, *si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas quæ ultimo fit ubi coeunt puncta* P & Q.

Figure for Prop. VI.

Namq; in figura indefinite parva *QRPT* lineola nascens *QR*, dato tempore, est ut vis centripeta (per Leg. II.) & data vi, ut quadratum temporis (per Lem. X.) atq; adeo, neutro dato, ut vis centripeta & quadratum temporis conjunctim, adeoq; vis centripeta ut lineola *QR* directe & quadratum temporis inverse. Est autem tempus ut area *SPQ*, ejus dupla *SP* $\times$ *QT*, id est ut *SP* & *QT* conjunctim, adeoq; vis centripeta ut *QR* directe atq; *SP quad.* in *QT quad.* inverse, id est ut *SP quad.* $\times$ *QT quad.* $\div$ *QR* inverse. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur figura quævis, & in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur; inveniri potest lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyrari faciet. Nimirum computandum est solidum *SP quad.* $\times$ *QT quad.* $\div$ *QR* huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

Prop. VII. Prob. II.

Figure for Prop. VII.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod in circumferentia datum.

Esto circuli circumferentia *SQPA*, centrum vis centripetæ *S*, corpus in circumferentia latum *P*, locus proximus in quem movebitur *Q*. Ad diametrum *SA* & rectam *SP* demitte perpendiculi *PK*, *QT*, & per *Q* ipsi *SP* parallelam age *LR* occurrentem circulo in *L* & tangenti *PR* in *R*, & coeant *TQ*, *PR* in *Z*. Ob similitudinem triangulorum *ZQR*, *ZTP*, *SPA* erit *RP quad.* (hoc est *QRL*) ad *QT quad.* ut *SA quad.* ad *SP quad.* Ergo *QRL* × *SP quad.* ÷ *SA quad.* æquatur *QT quad.* Ducantur hæc æqualia in *SP quad.* ÷ *QR*, & punctis *P* & *Q* coeuntibus, scribatur *SP* pro *RL*. Sic fiet *SP qc.* ÷ *SAq.* æquale *QTq.* × *SPq.* ÷ *QR*. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut *SP qc.* ÷ *SAq.*, id est (ob datum *SA quad.*) ut quadrato-cubus distantiæ *SP*. Quod erat inveniendum.

Prop. VIII. Prob. III.

Figure for Prop. VIII.

Moveatur corpus in circulo PQA*: ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum, ut lineæ omnes* PS*,* RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A circuli centro *C* agatur semidiameter *CA* parallelas istas perpendiculariter secans in *M* & *N*, & jungantur *CP*. Ob similia triangula *CPM*, & *TPZ*, vel (per Lem. VIII.) *TPQ*, est *CPq.* ad *PMq.* ut *PQq.* vel (per Lem. VII.) *PRq.* ad *QTq.* & ex natura circuli rectangulum *QR* × *RN* + *QN* æquale est *PR* quadrato. Coeuntibus autem punctis *P*, *Q* fit *RN* + *QN* æqualis 2*PM*. Ergo est *CP quad.* ad *PM quad.* ut *QR* × 2*PM* ad *QT quad.* adeoq; *QT quad.* ÷ *QR* æquale 2*PM cub.* ÷ *CP quad.*, & *QT quad.* × *SP quad.* ÷ *QR* æquale 2*PM cub.* × *SP quad.* ÷ *CP quad.* Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut 2*PM cub.* × *SP quad.* ÷ *CP quad.* hoc est (neglecta ratione determinata 2*SP quad.* ÷ *CP quad.*) reciproce ut *PM cub.* *Q. E. I.*

Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Prop. IX. Prob. IV.

Figure for Prop. IX.

Gyretur corpus in spiral PQS *secante radios omnes* SP*,* SQ*, &c. in angulo dato: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

Detur angulus indefinite parvus *PSQ*, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura *SPQRT*. Ergo datur ratio $QT \div RQ$ estq; QT *quad.* $\div QR$ ut *QT*, hoc est ut *SP*. Mutetur jam utcunq; angulus *PSQ*, & recta *QR* angulum contactus *QPR* subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius *PR* vel *QT*. Ergo manebit QT *quad.* $\div QR$ eadem quæ prius, hoc est ut *SP*. Quare $QTq. \times SPq. \div QR$ est ut *SP cub.* id est (per Corol. Theor. V.) vis centripeta ut cubus distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Lemma XII.

Parallelogramma omnia circa datam Ellipsin descripta esse inter se æqualia. Idem intellige de Parallelogrammis in Hyperbola circum diametros ejus descriptis.

Constat utrumq; ex Conicis.

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Figure for Prop. X.

Sunto *CA*, *CB* semiaxes Ellipseos; *GP*, *DK* diametri conjugatæ; *PF*, *Qt*, perpendicula ad diametros; *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*; & si compleatur parallelogrammum *QvRP*, erit (ex Conicis) *PvG* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* & (ob similia triangula *Qvt*, *PCF*) *Qv quad.* est ad *Qt quad.* ut *PC quad.* ad *PF quad.* & conjunctis rationibus, *PvG* ad *Qt quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* & *PC quad.* ad *PF quad.* id est *vG* ad *Qt quad.* $\div$ *Pv* ut *PC quad.* ad *CDq.* $\times$ *PFq.* $\div$ *PCq.*. Scribe *QR* pro *Pv*, & (per Lemma xii.) *BC* $\times$ *CA* pro *CD* $\times$ *PF*, nec non (punctis *P* & *Q* coeuntibus) 2*PC* pro *vG*, & ductis extremis & medijs in se mutuo, fiet *QTq.* $\times$ *PCq.* $\div$ *QR* æquale 2*BCq.* $\times$ *CAq.* $\div$ *PC*. Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut 2*BCq.* $\times$ *CAq.* $\div$ *PC*, id est (ob datum 2*BCq.* $\times$ *CAq.*) ut 1 $\div$ *PC*, hoc est, directe ut distantia *PC*. *Q. E. I.*

Corol. 1. Unde vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Figuris universis circa centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsibus similibus æqualia sunt per Corol. 3 & 7 Prop. IV: In Ellipsibus autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon areæ totæ directe & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse, hoc est ut axes illi directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse, & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipsis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens, evadet æquabilis. Hoc est Theorema *Galilei*. Et si Conisectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa.

SECT. III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

Prop. XI. Prob. VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: Requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Figure for Prop. XI.

Esto Ellipseos superioris umbilicus *S*. Agatur *SP* secans Ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* semisumma sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsorum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipseos latere recto principali (seu 2*BC quad.* $\div$ *AC*) dicto *L*, erit *L* $\times$ *QR* ad *L* $\times$ *Pv* ut *QR* ad *Pv*; id est ut *PE* (seu *AC*) ad *PC*; & *L* $\times$ *Pv* ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *CP quad.* ad *CD quad.*; & (per Lem. VIII.) *Qv quad.* ad *Qx quad.* punctis *Q* & *P* coeuntibus, est ratio æqualitatis, & *Qx quad.* seu *Qv quad.* est ad *QT quad.* ut *EP quad.* ad *PF quad.*, id est ut *CA quad.* ad *PF quad.* sive (per Lem. XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, *L* $\times$ *QR* fit ad *QT quad.* ut *AC* ad *PC* + *L* ad *Gv* + *CPq.* ad *CDq.* + *CDq.* ad *CBq.* id est ut *AC* $\times$ *L* (seu 2*CBq.*) $\times$ *CPq.* ad *PC* $\times$ *Gv* $\times$ *CBq.* sive ut 2*PC* ad *Gv*. Sed punctis *Q* & *P* coeuntibus, æquantur 2*PC* & *Gv*. Ergo & his proportionalia *L* $\times$ *QR* & *QT quad.* æquantur. Ducantur hæc aqualia in *SPq.* $\div$ *QR* & fiet *L* $\times$ *SPq.* æquale *SPq.* $\times$ *QTq.* $\div$ *QR*. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut *L* $\times$ *SPq.* id est reciproce in ratione duplicata distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

Prop. XII. Prob. VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Figure for Prop. XII.

Sunto *CA*, *CB* semi-axes Hyperbolæ; *PG*, *KD* diametri conjugatæ; *PF*, *Qt* perpendicula ad diametros; & *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*. Agatur *SP* secans tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QRPx*. Patet *EP* æqualem esse semi-axi transverso *AC*, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, ob æquales *CS*, *CH*, æquentur *ES*, *EI*; adeo ut *EP* semidifferentia sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsarum *PI*, *PH*, quarum differentia axem totum 2*AC* adæquat. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu 2*BCq.* ÷ *AC*) dicto *L*, erit *L* × *QR* ad *L* × *Pv* ut *QR* ad *Pv*, id est, ut *PE* (seu *AC*) ad *PC*; Et *L* × *Pv* ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qvq.* ut *CPq.* ad *CDq.*; & (per Lem. VIII.) *Qvq.* ad *Qxq.*, punctis *Q* & *P* coeuntibus fit ratio æqualitatis; & *Qxq.* seu *Qvq.* est ad *QTq.* ut *EPq.* ad *PFq.*, id est ut *CAq.* ad *PFq.*, sive (per Lem. XII.) ut *CDq.* ad *CBq.*: & conjunctis his omnibus rationibus *L* × *QR* fit ad *QTq.* ut *AC* ad *PC* + *L* ad *Gv* + *CPq.* ad *CDq.* + *CDq.* ad *CBq.*: id est ut *AC* × *L* (seu 2*BCq.*) × *PCq.* ad *PC* × *Gv* × *CB quad.* sive ut 2*PC* ad *Gv*, sed punctis *Q* & *P* coeuntibus æquantur 2*PC* & *Gv*. Ergo & his proportionalia *L* × *QR* & *QTq.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in *SPq.* ÷ *QR* & fiet *L* × *SPq.* æquale *SPq.* × *QTq.* ÷ *QR*. Ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce est ut *L* × *SPq.* id est in ratione duplicata distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

Lemma XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

Lemma XIV.

Figure for Lemma XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *APQ* Parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis, *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN*, & ob æquales *MS* & *SP*, *MN* & *NP*, *MA* & *AO*, parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*, & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A* & simile triangulis æqualibus *SMN*, *SPN*. Ergo *PS* est ad *SN* ut *SN* ad *SA*. *Q. E. D.*

Corol. 1. *PSq.* est ad *SNq.* ut *PS* ad *SA*.

Corol. 2. Et ob datam *SA*, est *SNq.* ut *PS*.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis *PM* cum recta *SN* quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam *AN*, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

Prop. XIII. Prob. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Figure for Prop. XIII.

Maneat constructio Lemmatis, sitq; *P* corpus in perimetro Parabolæ, & a loco *Q* in quem corpus proxime movetur, age ipsi *SP* Parallelam *QR* & perpendicularem *QT*, necnon *Qv* tangentiparallelam & occurrentem tum diametro *YPG* in *v*, tum distantiæ *SP* in *x*. Jam ob similia triangula *Pxv*, *MSP* & æqualia unius latera *SM*, *SP*, æqualia sunt alterius latera *Px* seu *QR* & *Pv*. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ *Qv* æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri *Pv*, id est (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$ seu $4PS \times$

QR; & punctis *P* & *Q* coeuntibus, ratio *Qv* ad *Qx* (per Lem. 8.) fit æqualitatis. Ergo *Qxq.* eo in casu, æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob æquales angulos *QxT*, *MPS*, *PMO*) *Qxq.* ad *QTq.* ut *PSq.* ad *SNq.* hoc est (per Corol. I. Lem. XIV.) ut *PS* ad *AS*, id est ut $4PS \times QR$ ad $4AS \times QR$, & inde (per Prop. 9. Lib. V. Elem.) *QTq.* & $4AS \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in *SPq.* ÷ *QR*, & fiet *SPq.* × *QTq.* ÷ *QR* æquale *SPq.* × 4*AS*: & propterea (per Corol. Theor. V.) vis centripeta est reciproce ut *SPq.* × 4*AS*, id est, ob datam 4*AS*, reciproce in duplicata ratione distantiæ *SP*. *Q. E. I.*

Corol. I. Ex tribus novissimis Proportionibus consequens est, quod si corpus quodvis *P*, secundum lineam quamvis rectam *PR*, quacunq; cum velocitate exeat de loco *P*, & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra.

Corol. II. Et si velocitas, quacum corpus exit de loco suo *P*, ea sit, qua lineola *PR* in minima aliqua temporis particula describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium *QR*: movebitur hoc corpus in Conica aliqua sectione cujus latus rectum est quantitas illa *QTq.* ÷ *QR* quæ ultimo fit ubi lineolæ *PR*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipsin, & casum excipio ubi corpus recta descendit ad centrum.

Prop. XIV. Theor. VI.

> *Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta decrescat in duplicata ratione distantiarum a centro; dico quod Orbium Latera recta sunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.*

Nam per Corol. II. Prob. VIII. Latus rectum *L* æquale est quantitati *QTq.* ÷ *QR* quæ ultimo fit ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Sed linea minima *QR*, dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est (per Hypothesin) reciproce ut *SPq*. Ergo *QTq.* ÷ *QR* est ut *QTq.* × *SPq.* hoc est, latus rectum *L* in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc Ellipseos area tota, eiq; proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti &

integra ratione temporis periodici.

Prop. XV. Theor. VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata transversorum axium.

Namq; axis minor est medius proportionalis inter axem majorem (quem transversum appello) & latus rectum, atq; adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis transversi. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Theorematis Sexti, est in ratione composita ex dimidiata ratione lateris recti & integra ratione periodici temporis. Dematur utrobiq; dimidiata ratio lateris recti & manebit sesquiplicata ratio axis transversi æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

Prop. XVI. Theor. VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisq; ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Vide Fig. Prop. X. &. XI.

Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendiculum *SY* & velocitas corporis *P* erit reciproce in dimidiata ratione quantitatis $SYq. \div L$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *PQ* in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens *PR*, id est (ob proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *SY*) ut $SP \times QT \div SY$, sive ut *SY* reciproce & $SP \times QT$ directe; estq; $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Theor. VI. in dimidiata ratione lateris recti *Q. E. D.*

Corol. 1. Latera recta sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico

communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & dimidiata ratione laterum rectorum directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoq; velocitas in Conica sectione, in minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia, in dimidiata ratione lateris recti ad distantiam illam duplicatam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias, hoc est (per Corol. VI. Theor. IV.) reciproce in dimidiata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum dimidiata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio dimidiata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem vel æqualibus figuris, vel etiam in figuris inæqualibus, quarum latera recta sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in dimidiata ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2 Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in dimidiata ratione distantiæ.

Corol. 7. In Parabola, velocitas ubiq; est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in dimidiata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Theorematis quarti, servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubiq; æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti Sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Theor. IV.) velocitas gyrantis in

hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio, reciproce in dimidiata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

Prop. XVII. Prob. IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea quam corpus describit, de loco dato cum data velocitate secundum datam rectam egrediens.

Figure for Prop. XVII.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit quæ corpus p in orbita quavis data pq gyrare faciat, & cognoscatur hujus velocitas in loco p. De loco P secundum lineam PR exeat corpus P cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Conisectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua pr orbitam pq in p, & si ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Theor. VIII.) latus rectum Conisectionis ad latus rectum orbitæ datæ, in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atq; adeo datur. Sit istud L. Datur præterea Conisectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH, & dabitur positione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculo SK, & erecto semiaxe conjugato BC, est $SPq. - 2KPH + PHq.$ (per Prop. 13. Lib. II. Elem.) $= SHq. = 4CHq. = 4BHq. - 4BCq. = SP + PH\ quad. - L \times SP + PH = SPq. + 2SPH + PHq. - L \times SP + PH$. Addantur utrobiq; $2KPH + L \times SP + PH - SPq. - PHq.$ & fiet $L \times SP + PH = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS, adeoq; figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$,

longitudo *PH* infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens *SH* parallelum lineæ *PK*, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo *P* exeat, capienda erit longitudo *PH* ad alteram partem tangentis, adeoq; tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum *SP* & *PH*, & inde dabitur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc in omni Conisectione ex dato vertice principali *D*, latere recto *L*, & umbilico *S*, datur umbilicus alter *H* capiendo *DH* ad *DS* ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4*DS*. Nam proportio *SP* + *PH* ad *PH* ut 2*SP* ad *L*, in casu hujus Corollarii, fit *DS* + *DH* ad *DH* ut 4*DS* ad *L*, & divisim *DS* ad *DH* ut 4*DS* - *L* ad *L*.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali *D*, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam *DS*, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam *DS* gyrantis: (Per Corol. 3. Theor. VIII.) dein *DH* ad *DS* ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4*DS*.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunq; Conica, & ex orbe suo impulsu quocunq; exturbetur; cognosci potest orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia, mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

SECT. IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

Figure for Lemma XV.

Lemma XV.

Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H*, ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV*, quarum una* HV *æqualis sit axi transverso figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T*; perpendiculum illud* TR *sectionem Conicam alicubi tangit: & contra, si tangit, erit* VH *æqualis axi figuræ.*

Secet enim *VH* sectionem conicam in *R*, & jungatur *SR*. Ob æquales rectas *TS*, *TV*, æquales erunt anguli *TRS*, *TRV*. Bisecat ergo *RT* angulum *VRS* & propterea figuram tangit: & contra. *Q. E. D.*

Prop. XVIII. Prob. X.

Datis umbilico & axibus transversis describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Figure for Prop. XVIII.

Sit *S* communis umbilicus figuraram; *AB* longitudo axis transversi Trajectoriæ cujusvis; *P* punctum per quod Trajectoria debet transire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo *AB* - *SP*, si orbita sit Ellipsis, vel *AB* + *SP*, si ea sit Hyperbola, describatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur ea ad *V* ut sit *TV* æqualis *ST*; centroq; *V* & intervallo *AB* describatur circulus *FH*. Hac methodo sive dentur duo puncta *P*, *p*, sive duæ

tangentes *TR*, *tr*, sive punctum *P* & tangens *TR*, describendi sunt circuli duo. Sit *H* eorum intersectio communis, & umbilicis *S*, *H*, axe illo dato describatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria descripta (eo quod *PH* + *SP* in Ellipsi, & *PH* - *SP* in Hyperbola æquatur axi) transibit per punctum *P*, & (per Lemma superius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo *P*, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*.   *Q. E. F.*

Prop. XIX. Prob. XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Figure for Prop. XIX.

Sit *S* umbilicus, *P* punctum & *TR* tangens trajectoriæ describendæ. Centro *P*, intervallo *PS* describe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo describendus est alter circulus *fg*, si datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, si datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* si dantur duo puncta *P*, *p*; vel transeat per duo puncta *V*, *v*, si dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & transeat per punctum *V*, si datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamq; biseca in *K*, & axe *SK*, vertice principali *K* describatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola ob æquales *SK* & *IK*, *SP* & *FP* transibit per punctum *P*; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*.   *Q. E. F.*

Prop. XX. Prob. XII.

Figure for Prop. XX.

Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget

positione datas.

Cas. 1. Dato umbilico *S*, describenda sit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur specie, dabitur ratio axis transversi ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, describe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eosdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemq; seca in *A* & *a*, ita ut sit *SA* ad *AG* & *Sa* ad *aG*, ut est *SB* ad *BK*, & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, describatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit *SA* ad *AG* ut *Sa* ad *aG*, erit divisim *Sa* - *SA* seu *SH* ad *aG* - *AG* seu *Aa* in eadem ratione, adeoq; in ratione quam habet axis transversus figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumq; sint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, transibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifestum est.

Figure for Prop. XX. Cas. 2.

Cas. 2. Dato umbilico *S*, describenda sit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut sint *TV*, *tv* æquales *TS*, *ts*. Biseca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinite *OH*, rectamq; *VS* infinite productam seca in *K* & *k* ita, ut sit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut est Trajectoriæ describendæ axis transversus ad umbilicorum distantiam. Super diametro *Kk* describatur circulus secans rectam *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe transverso ipsam *VH* æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Nam biseca *Kk* in *X*, & junge *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Quoniam est *VK* ad *KS* ut *Vk* ad *kS*; & composite ut *VK* + *Vk* ad *KS* + *kS*; divisimq; ut *Vk* - *VK* ad *kS* - *KS* id est ut 2*VX* ad 2*KX* & 2*KX* ad 2*SX*, adeoq; ut *VX* ad *HX* & *HX* ad *SX*, similia erunt triangula *VXH*, *HXS*, & propterea *VH* erit ad *SH* ut *VX* ad *XH*, adeoq; ut *VK* ad *KS*. Habet igitur Trajectoria; descriptæ axis transversus *VH* eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam *SH*, quam habet Trajectoriæ describendæ axis transversus ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum *VH*, *vH* æquentur axi transverso, & *VS*, *vS* a rectis *TR*, *tr* perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

Figure for Prop. XX. Cas. 3.

Cas. 3. Dato umbilico *S* describenda sit Trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem *ST*, & produc eandem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Junge *VR*, & rectam *VS* infinite productam seca in *K* & *k*, ita ut sit *VK* ad *SK* & *Vk* ad *Sk* ut Ellipseos describendæ axis transversus ad distantiam umbilicorum; circuloq; super diametro *Kk* descripto, secetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe transverso rectam *HV* æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namq; *VH* esse ad *SH* ut *VK* ad *SK*, atq; adeo ut axis transversus Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda: rectam vero *TR* qua angulus *VRS* bisecatur, tangere

Trajectoriam in puncto *R*, patet ex Conicis. *Q. E. F.*

Figure for Prop. XX. Cas. 4.

Cas. 4. Circa umbilicum *S* describenda jam sit Trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, transeatq; per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæq; similis sit figuræ *apb*, axe transverso *ab* & umbilicis *s*, *h* descriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Angulis autem *VSP*, *SVP* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroq; *q* intervallo quod sit ad *ab* ut *SP* ad *VS* describe circulum secantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH* quæ sit ad *sh* ut est *SP* ad *sp* quæq; angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales constituat. Deniq; umbilicis *S*, *H*, axe distantiam *VH* æquante, describatur sectio conica.

Dico factum. Nam si agatur *sv* quæ sit ad *sp* ut est *sh* ad *sq*, quæq; constituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt similia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut est *sh* ad *sq*, id est (ob similia triangula *VSP*, *hsq*) ut est *VS* ad *SP* seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro ob similia triangula *VSH*, *vsh* est *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id est, axis Conicæ actionis jam descripta: ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*, & propterea figura jam descripta similis est figuræ *apb*. Transit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *PSH* simile sit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipsius axi & *VS* bisecatur perpendiculariter a recta *TR* tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

Lemma XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Figure for Lemma XVI.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet: Ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & axis

transversus differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecto *PR* perpendiculari ad *AB*, demissoq; *ZR* perpendiculari ad *PR*, erit ex natura hujus Hyperbolæ *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt *A*, *C* & axis transversus differentia inter *AZ* & *CZ*, duciq; potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; adeoq; rectis *RP*, *SQ* concurrentibus in *T*, locabitur punctum *Z* in recta *TZ* positione data. Eadem Methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt *B* & *C* & axis transversus differentia rectarum *BZ*, *CZ*, inveniri potest alia recta in qua punctum *Z* locatur. Habitis autem duobus locis rectilineis, habetur punctum quæsitum *Z* in earum intersectione, *Q. E. I.*

Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ* æquantur, punctum *Z* locabitur in perpendiculo bisecante distantiam *AB*, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* transeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum. Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

Prop. XXI. Prob. XIII.

Figure for Prop. XXI.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus sit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *Y*, ut sit *TY* æqualis *ST*, & erit *YH* æqualis axi transverso. Junge *SP*, *HP* & erit *SP* differentia inter *HP* & axem transversum. Hoc modo si dentur plures tangentes *TR*, vel plura puncta *P*, devenietur semper ad lineas totidem *YH*, vel *PH*, a dictis

punctis *Y* vel *P* ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *SP* differunt ab iisdem, atq; adeo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma superius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est *YH*, vel si Trajectoria Ellipsis est, *PH* + *SP*; sin Hyperbola *PH* - *SP*) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*

Scholium.

Figure for Scholium.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut sit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inq; *GS* infinite producta cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis transversus Trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* minor, æqualis vel major fuerit quam *AS*, erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo casu cadente ad eandem partem lineæ *GK* cum puncto *A*; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GK*. Nam si demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*, erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc est ut *SC* ad *SB*; & vicissim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB*, seu *GA* ad *SA*. Et simili argumento probabitur esse *KD* ad *SD* in eadem ratione. Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in Conisectione circa umbilicum *S* ita descripta, ut rectæ omnes ab umbilico *S* ad singula Sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam *GK* demissa in data illa ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit Clarissimus Geometra *De la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

SECT. V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

Lemma XVII.

Figure for Lemma XVII.

Si a datæ conicæ sectionis puncto quovis P*, ad Trapezii alicujus* ABCD*, in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB*,* CD*,* AC*,* DB*, totidem rectæ* PQ*,* PR*,* PS*,* PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ × PR*, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS × PT *in data ratione.*

Cas. 1. Ponamus imprimis lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintq; insuper latera duo ex oppositis, puta *AC* & *BD*, parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis, & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K* ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* sint ad Conicam sectionem, & *PR* secet *AB* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ* × *PR* æqualia sunt; atq; adeo rectangulum *PQ* × *PR* est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum *PS* × *PT* in data ratione. *Q. E. D.*

Figure for Cas. 2.

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera opposita *AC* & *BD* non esse parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum Conicæ sectioni in *d*. Junge *Cd* secantem *PQ* in *r*, & ipsi *PQ* parallelam age *DM* secantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob similia

triangula *BTt*, *DBN*, est *Bt* seu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* est ad *AQ* seu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* est ad rectangulum *Tt* in *PS*, ita rectangulum *NDM* est ad rectangulum *ANB*, & (per Cas. 1) ita rectangulum *QPr* est ad rectangulum *SPt*, ac divisim ita rectangulum *QPR* est ad rectangulum *PS* × *PT*. *Q. E. D.*

Figure for Cas. 3.

Cas. 3. Ponamus deniq; lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *AB*, sed ad ea utcunq; inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipsi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps* & *PT* ad *Pt*, atq; adeo rationes compositæ *PQ* in *PR* ad *Pq* in *Pr*, & *PS* in *PT* ad *Ps* in *Pt*. Sed per superius demonstrata, ratio *Pq* in *Pr* ad *Ps* in *Pt* data est: Ergo & ratio *PQ* in *PR* ad *PS* in *PT*. *Q. E. D.*

Lemma XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera Trapezii PQ × PR *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS × PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam sectionem circa Trapezium descriptam.*

Figure for Lemma XVIII.

Per puncta *A*, *B*, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe Conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in *P* si fieri potest, puta in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *br*, *bſ*, *bd*; erit ut *bk* × *br* ad *bd* × *bſ* ita (per Lemma XVII) *pq* × *pr* ad *ps* × *pt* & ita (per hypoth.) *PQ* × *PR* ad *PS* × *PT*. Est & propter similitudinem Trapeziorum *bkAſ*, *PQAS*, ut *bk* ad *bſ* ita *PQ* ad *PS*. Quare applicando terminos prioris propositionis ad terminos

correspondentes hujus, erit *b*r ad *bd* ut *PR* ad *PT*. Ergo Trapezia æquiangula *Drbd*, *DRPT* similia sunt, & eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaq; *b* in intersectionem rectarum *AP*, *DP* adeoq; coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunq; sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* a puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB*, *CD*, *AC*, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitq; rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertii, *PS quad.* in data ratione: punctum *P*, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas *AB*, *CD* in *A* & *C* & contra. Nam coeat linea *BD* cum linea *AC* manente positione trium *AB*, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea *PT* cum linea *PS*: & rectangulum $PS \times PT$ evadet *PS quad.* rectæq; *AB*, *CD* quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

Scholium.

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem Coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. Nam si punctum *p* incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* junguntur, Conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitq; rectangulum sub duabus ductis $PS \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum *S*, *T*, in quibus duæ ultimæ *PS*, *PT* ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ *PQ*, *PR* ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii *ABCD* substitui potest quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* possunt unum vel duo abire in infinitum, eoq; pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela:

quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

Lemma XIX.

Figure for Lemma XIX.

> *Invenire punctum* P*, a quo si rectæ quatuor* PQ*,* PR*,* PS*,* PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB*,* CD*,* AC*,* BD *singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* PQ × PR*, sit ad rectangulum sub aliis duabus,* PS × PT*, in data ratione.*

Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR*, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, adeoq; ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc a data ratione *PQ* × *PR* ad *PS* × *PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH* atq; adeo punctum *P*. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum *P* punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda *PD* ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *AH* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *IP* & *PH* invenietur ut supra. Ipsi igitur *AD* duc parallelam *CF*, occurrentem *BD* in *F*, & in ea ultima ratione sectam in *E*, & *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evanescens *IH* parallelæ sunt, & in *E* & *P* similiter sectæ.

Figure for Corol. 2.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium *P* definiri potest. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc Loci tangentem *AE*, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF* occurrentem Loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per Lemma superius. Biseca

BF in *G*, & acta *AG* diameter erit ad quam *BG* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat Loco in *H*, & erit *AH* latus transversum, ad quod latus rectum est ut *BGq*. ad *AGH*. Si *AG* nullibi occurrit Loco, linea *AH* existente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum ejus *BGq.* ÷ *AG*. Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta *A* & *H* sita sunt ad easdem partes ipsius *G*: & Ellipsis, ubi *G* intermedium est, nisi forte angulus *AGB* rectus sit & insuper *BG quad.* æquale rectangulo *AGH*, quo in casu circulus habebitur.

Atq; ita Problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

Lemma XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis Conicam in punctis* A *&* P*, & lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ*,* AS *occurrit eidem sectioni Conicæ in* B *&* C*; a punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD*,* CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS*,* PQ *in* T *&* R*: erunt semper abscissæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A*,* B*,* P*,* C *transeuntem.*

Figure for Lemma XX.

Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & a puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum *DE* × *DF* ad rectangulum *DG* × *DH* in ratione data. Sed est *PQ* ad *DE* seu *IQ*, ut *PB* ad *HB*, adeoq; ut *PT* ad *DH*; & vicissim *PQ* ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Est & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, adeoq; ut *IG* vel *PS* ad *DG*, & vicissim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus fit rectangulum *PQ* × *PR* ad rectangulum *PS* × *PT* ut rectangulum *DE* × *DF* ad rectangulum *DG* × *DH*, atq; adeo in data ratione. Sed dantur *PQ* & *PS* & propterea ratio *PR* ad *PT* datur.

Q. E. D.

Cas. 2. Quod si *PR* & *PT* ponantur in data ratione ad invicem, tunc simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data, adeoq; punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta *A*, *B*, *P*, *C*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si agatur *BC* secans *PQ* in *r*, & in *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr* quam habet *PT* ad *PR*, erit *Bt* Tangens Conicæ sectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evanescente, *BT* Tangens evadet; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.

Corol. 2. Et vice versa si *Bt* sit Tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD* erit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, si sit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*, convenient *BD*, *CD* ad Conicæ sectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinq; puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *P*, easq; secet recta *BD* in punctis *D*, *d*, & ipsam *PQ* secet recta *Cd* in r. Ergo *PR* est ad *PT* ut *P*r ad *PT*, hoc est, *PR* & *P*r sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.

Lemma XXI.

Figure for Lemma XXI.

> *Si recta duæ mobiles & infinitæ* BM, CM *per data puncta* B, C, *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN*; & aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C, *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem Conicam. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant Sectionem Conicam per puncta* B, C, A *transeuntem, & harum concursus tunc incidit in ejus punctum aliquod* A, *cum alteræ duæ* BM, CM *coincidunt cum linea* BC, *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit

in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes angulum *BPT* æqualem angulo *BNM* & angulum *CPR* æqualem angulo *CNM*. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*: aufer communes *NBD* & *MCP*, & restabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCM* & *PCR*: adeoq; triangula *NBM*, *PBT* similia sunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* est ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeq; datam rationem inter se, atq; adeo, per Lemma XX, punctum *P* (perpetuus rectarum mobilum *BT* & *CR* concursus) contingit sectionem Conicam. *Q. E. D.*

Et contra, si punctum *D* contingit sectionem Conicam transeuntem per puncta *B*, *C*, *A*, & ubi rectæ *BM*, *CM* coincidunt cum recta *BC*, punctum illud *D* incidit in aliquod sectionis punctum *A*; ubi vero punctum *D* incidit successive in alia duo quævis sectionis puncta *p*, *P*, punctum mobile *M* incidit successive in puncta immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur recta *nN*, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, si fieri potest, versetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum *D* sectionem Conicam per puncta quinq; *C*, *p*, *P*, *B*, *A*, transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum *D* sectionem Conicam per eadem quinq; puncta *C*, *p*, *P*, *B*, *A*, transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinq; puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* versari in linea curva absurdum est. *Q. E. D.*

Prop. XXII. Prob. XIV.

Trajectoriam per data quinq; puncta describere.

Figure for Prop. XXII.

Dentur puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC* hisq; parallelas *TPS*, *PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT*, *CRD*, novissime ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Deniq; de rectis *PT*, *PR*, acta recta *tr* ipsi *TR* parallela, abscinde

quasvis *Pt*, *Pr* ipsis *PT*, *PR* proportionales, & si per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæsita. Nam punctum illud *d* (per Lem. XX) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A*, *B*, *P*, *C* transeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evanescentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Transit ergo sectio Conica per puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*.   *Q. E. D.*

Idem aliter.

Figure for Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*, & circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D* deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* casu utroq; se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio, quæ jam sit *m*, incidat semper in rectam illam infinitam *MN*, & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* intersectio, quæ jam sit *d*, Trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* per Lem. XXI continget sectionem Conicam per puncta *B*, *C* transeuntem & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Describetur itaq; sectio Conica transiens per puncta quinq; *A*, *B*, *C*, *D*, *P*.   *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc rectæ expedite duci possunt quæ trajectoriam in punctis quibusvis datis *B*, *C* tangent. In casu utrovis accedat punctum *d* ad punctum *C* & recta *Cd* evadet tangens quæsita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX.

Schol.

Constructio in casu priore evadet paulo simplicior jungendo *BP*, & in ea si opus est producta, capiendo *Bp* ad *BP* ut est *PR* ad *PT*, & per *p* agendo rectam infinitam *pD* ipsi *SPT* parallelam, inq; ea capiendo semper *pD* æqualem *Pr*, & agendo rectas *BD*, *Cr* concurrentes in *d*. Nam cum sint *Pr* ad *Pt*, *PR* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *pD* ad *Pt* in eadem ratione, erunt *pD* & *Pr* semper æquales. Hac methodo puncta

Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in casu secundo, describere Mechanice.

Prop. XXIII. Prob. XV.

Trajectoriam describere quœ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens *HB*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *BC*, & agendo *PS* parallelam *BH*, & *PQ* parallelam *BC*, comple parallelogrammum *BSPQ*. Age *BD* secantem *SP* in *T*, & *CD* secantem *PQ* in *R*. Deniq; agendo quamvis *tr* ipsi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abscinde *Pr*, *Pt* ipsis *PR*, *PT* proportionales respective; & actarum *Cr*, *Bt* concursus *d* (per Corol. 2. Lem. XX) incidet semper in Trajectoriam describendam.

Figure for Prop. XXIII.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *CBH* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinq; productus *DC* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N* in quibus anguli crus *BC* secat radium illum ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *D* & *P*. Deinde ad actam infinitam *MN* concurrant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *CB*, & cruris alterius *BH* concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.

Figure for Idem aliter.

Figure for Cas. 2.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo suo situ fiet tangens *BH*, atq; adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concursus cum radio sectionem Conicam per puncta *C*, *D*, *P* transeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* sita. Junge bina *BD*, *CP* concurrentia in *G*, tangentiq; occurrentia in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut sit *HA* ad *AI*, ut est rectangulum sub media proportionali inter *BH* & *HD* & media proportionali inter *CG* & *GP*, ad rectangulum sub media proportionali inter *PI* & *IC* & media proportionali inter *DG* & *GB*, & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ *PI* parallela *HX* trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis) *HA quad.* ad *AI quad.* ut rectangulum *XHY* ad rectangulum *BHD* (seu rectangulum *CGP* ad rectangulum *DGB*) & rectangulum *BHD* ad rectangulum *PIC* conjunctim. Invento autem contactus puncto *A*, describetur Trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.* Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.

Prop. XXIV. Prob. XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Figure for Prop. XXIV.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Age *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K* & *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactus. Nam si *A* & *P* sint Puncta contactuum ubivis in tangentibus sita, & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I* agatur recta *IY* tangenti *KL* parallela & occurrens curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex Conicis, rectangulum *XIY* (seu *IZ quad.*) ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*; id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atq; adeo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *XIY* (seu *IZ quad.*) ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.*, adeoq; *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in una recta, adeoq; puncta *S*, *P* & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento

probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactus *A* & *P* in recta *SR*. Hisce autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. *Q. E. F.*

Lemma XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Figure for Lemma XXII.

Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis positione datam *AB* secantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur *GD*, ipsi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O* in linea *OA* dato ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipsi *BL* occurrens in *d*; & a puncto occursus erigatur recta *gd*, datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atq; eam habens rationem ad *Od* quam habet *GD* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *hgi* puncto *G* respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *BD* abscissam primam, *Bd* abscissam novam; *O* polum, *OD* radium abscindentem, *OA* radium ordinatum primum & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod si punctum *G* tangit rectam lineam positione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum *G* tangit Conicam sectionem, punctum *g* tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro si punctum *G* tangit lineam tertii ordinis Analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum: Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. Etenim ut est *ad* ad *OA* ita sunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, & *AB* ad *AD*; adeoq; *AD* æqualis est $OA \times AB \div ad$ & *DG* æqualis est $OA \times dg \div ad$. Jam si punctum *D* tangit rectam lineam, atq; adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam *AD* & ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad unicam

tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $OA \times AB \div ad$ pro AD, & $OA \times dg \div ad$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova *ad* & ordinata noua *dg* ad unicam tantum dimensionem ascendent, atq; adeo quæ designat lineam rectam. Sin *AD* & *DG* (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ *ad*, *dg* in æquatione secunda & *AD*, *DG* in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta *G*, *g* tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta translata tanget lineam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata coibunt in figura nova, atq; adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur simul, evadent curvarum tangentes in figura utraq;. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope Curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo *AO* lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur Solutio quæsita.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet unum earum in circulum. Recta item & sectio Conica in constructione planorum problematum vertuntur in rectam & circulum.

Prop. XXV. Prob. XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.

Figure for Prop. XXV.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaq; adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo transeunti. Sunto *hi, kl* tangentes duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela transiens per puncta illa *a, b,* per quæ Conica sectio in hac figura nova transire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi, ik, kl* in *c, d* & *e,* ita ut sit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb, ic* ad *id,* & *ke* ad *kd* ut est summa rectarum *hi* & *kl* ad summam trium linearum quarum prima est recta *ik,* & alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: Et erunt *c, d, e* puncta contactus. Etenim, ex Conicis, sunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb,* & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad *alb* rectangulum in eadem ratione, & propterea *hc* ad latus quadratum ipsius *ahb, ic* ad *id, ke* ad *kd* & *el* ad latus quadratum ipsius *alb* sunt in dimidiata illa ratione, & composite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli *ahb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactus *c, d, e,* in figura nova. Per inversas operationes Lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per casum primum Problematis XIV, describetur Trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta *a, b* jacent vel inter puncta *h, l,* vel extra, debent puncta *c, d, e* vel inter puncta *h, i, k, l* capi, vel extra. Si punctorum *a, b* alterutrum cadit inter puncta *h, l,* & alterum extra, Problema impossibile est.

Prop. XXVI. Prob. XVIII.

Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & Tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitq; *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & existente *Oq* æquali *Op* erit *q* punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q. E. F.*

Lemma XXIII.

Figure for Lemma XXIII.

> *Si rectæ duæ positione datæ* AC, BD *ad data puncta* A, B *terminentur, datamq; habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur secetur in ratione data in* K*: dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*

Concurrant enim rectæ *AC, BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitq; *FD* æqualis *EG*, & erit *EC* ad *GD*, hoc est ad *EF* ut *AC* ad *BD*, adeoq; in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* in ratione *CK* ad *CD*, & dabitur etiam specie triangulum *EFL*, proindeq; punctum *L* locabitur in recta *EL* positione data. Junge *LK*, & ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi latere positione dato *HK*. *Q. E. D.*

Lemma XXIV.

> *Si rectæ tres tangant quamcunq; conisectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis*

semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactum & tangenti tertiæ interjecta.

Figure for Lemma XXIV.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ Conisectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia Conisectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; sitq; *CD* semidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *AF*, *CD*, *BG* sunt continue proportionales.

Nam si diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H*, seq; mutuo secent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit ex natura sectionum Conicarum, ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *LC*, & ita divisim *EC* - *CA* ad *CA* - *CL* seu *EA* ad *AL*, & composite *EA* ad *EA* + *AL* seu *EL* ut *EC* ad *EC* + *CA* seu *EB*; adeoq; (ob similitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*) *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Est itidem ex natura sectionum Conicarum *LI* seu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH* atq; adeo ex æquo perturbate *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, seq; mutuo secent in *O*, erit (ex æquo perturbate) *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & divisim ut *FP* ad *GQ*, atq; adeo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ* per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* transeuntem.

Lemma XXV.

Si parallelogrammi latera quattuor infinite producta tangant sectionem quamcunq; Conicam & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem abscisse terminate ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa unius lateris ad latus illud, ut pars lateris contermini inter punctum contactus & latus tertium, ad abscissam lateris hujus contermini.

Figure for Lemma XXV.

Tangant parallelogrammi *MIKL* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem Conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*: dico quod sit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ* & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per Corollarium Lemmatis superioris, est *ME* ad *EI* ut *AM* seu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. Q. E. D. Item *KH* ad *HL* ut *BK* seu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si parallelogrammum *IKLM* datur, dabitur rectangulum *KQ* × *ME*, ut & huic æquale rectangulum *KH* × *MF*. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *e* & *q*, rectangulum *KQ* × *ME* æquabitur rectangulo *Kq* × *Me*, eritq; *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & divisim ut *Qq* ad *Ee*.

Corol. 3. Unde etiam si *Eq*, *eQ* jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, transibit eadem recta per medium omnium *Eq*, *eQ*, *MK*; (per Lemma XXIII) & medium rectæ *MK* est centrum Sectionis.

Prop. XXVII. Prob. XIX.

Figure for Prop. XXVII.

Trajectoriam describere quæ rectas quinq; positione datas continget.

Dentur positione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ *ABFE* diagonales *AF*, *BE* biseca, & (per Cor. 3. Lem. XXV) recta per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ *BGDF*, sub alijs quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD*, *GF* biseca, & recta per puncta bisectionum acta transibit per centrum sectionis. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *CD*, *FDE* in *L* & *K*. Per tangentium non parallelarum *CL*,

FK cum parallelis *CF*, *KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Casum 1. Prob. XIV. Trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Schol.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asymptoti includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæq; tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atq; constructiones Problematis XV & Casus primi Problematis XIV vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.

Figure for Scholium.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & Figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP* quorum concursu Trajectoria describebatur sint sibi invicem parallela, eumq; servantia situm revolvantur circa polos suos *B*, *C* in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN* concursu suo *K* vel *k*, circulum *IBKGC*. Sit circuli hujus centrum *O*. Ab hoc centro ad Regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant dum Trajectoria describebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrant ad punctum istud *K* quod Regulæ proprius est, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam

si duo ex punctis datis constituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles *PCK*, *PBK*. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, centroq; *O* & intervallo *OH* describendo circulum, & per punctum quartum agendo rectam quæ circulum illum tangat, dabitur regula *MN* cujus ope Trajectoria describatur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione Conica inscribi potest.

Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atq; axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

Lemma XXVI.

Figure for Lemma XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF* describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF* ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant: deinde compleantur hæc Figure for Lemma XXVI. segmenta in circulos. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintq; centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum

aE secans circulum tertium *GEc* in *c*. Et compleatur figura *ABCdef* similis & æqualis figuræ *abcDEF*. Dico factum.

Agatur enim *Fc* ipsi *aD* occurrens in *n*. Jungantur *aG*, *bG*, *PD*, *QD* & producatur *PQ* ad *R*. Ex constructione est angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & angulus *EcF* æqualis angulo *ACB*, adeoq; triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* seu *FnD* angulo *ABC*, adeoq; angulo *FbD* æqualis est, & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, qui dimidius est anguli ad centrum *GPD*, æqualis est angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQR*, qui dimidius est complementi anguli ad centrum *GQD*, æqualis est angulo ad circumferentiam *GbD*, adeoq; eorum complementa *PQG*, *abG* æquantur, suntq; ideo triangula *GPQ*, *Gab* similia, & *Ga* est ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id est (ex constructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaq; *ab* & *AB*, & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* respective, compleri potest figura *ABCdef* figuræ *abcDEF* similis & æqualis, atq; eam complendo solvetur Problema. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe Triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE*, rectis positione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis positione datis *AB*, *BC* interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

Prop. XXVIII. Prob. XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ *DEF*, quæq; a rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* positione datis, in partes datis hujus partibus *DE* & *EF* similes & æquales secabitur.

Figure for Prop. XXVIII.

Age rectas *DE*, *EF*, *DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D*, *E*, *F* ad

rectas illas positione datas: (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum describe Trajectoriam curvæ *DEF* similem & æqualem. *Q. E. F.*

Lemma XXVII.

Trapezium specie datum describere cujus anguli ad rectas quatuor positione datas (quæ neq; omnes parallelæ sunt, neq; ad commune punctum convergunt) singuli ad singulas consistent.

Figure for Lemma XXVII.

Dentur positione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*, quarum prima secet secundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & describendum sit Trapezium *fghi* quod sit Trapezio *FGHI* simile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC* cæteriq; anguli *g*, *h*, *i* cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* respective. Jungatur *FH*, & super *FG*, *FH*, *FI* describantur totidem circulorum segmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, secundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBE*; ac tertium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem sit ordo circularis qui literarum *BADB*, utq; literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBEC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos, sitq; *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum secundi *FTH*. Jungatur & utrinq; producatur *PQ*, & in ea capiatur *QR* in ea ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem sit ordo circularis atq; literarum *A*, *B*, *C*: centroq; *R* & intervallo *RF* describatur circulus quartus *FNc* secans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* secans circulum primum in *a* & secundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* similis constituatur figura *ABCfghi*: Eritq; Trapezium *fghi* illud ipsum quod constituere oportuit.

Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* se mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK* & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK*, sunt semisses angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, adeoq; angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. Est ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & similis, &

propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est ut *AB* ad *BC*. Angulis insuper *FaG*, *FbH*, *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per constructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura similis *ABCfghi* compleri potest. Quo facto Trapezium *fghi* constituetur simile Trapezio *FGHI* & angulis suis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* usq; eo, ut rectæ *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc casu construendo Problema, ducetur recta *fghi* cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor positione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemq; servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut sit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut sit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipsi *LB* parallela rectæq; *AD* occurrens in *g*, tum *gi* secans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

Figure for Corol.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP*, quæ sit ipsi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *Mg* ad *Lh* (*Mi* ad *Li*, *gi* ad *hi*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad *BL* in eadem ratione. Secetur *DL* in *R* ut sit *DL* ad *RL* in eadem illa ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP* & *DS* ad *DL*, erit ex æquo ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL* - *RL* ad *Lh* - *BL* ut *AS* - *DS* ad *gS* - *AS*. Id est *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, adeoq; ut *BD* ad *gQ*. Et vicissim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ* seu *fh* ad *fg*. Sed ex constructione est *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* est ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur sit etiam *ig* ad *ih* ut *Mi* ad *Li*, id est, ut *IG* ad *IH*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* similiter sectas esse. *Q. E. F.*

In constructione Corollarii hujus postquam ducitur *LK* secans *CE* in *i*, producere licet *iE* ad *V*, ut sit *EV* ad *iE* ut *FH* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipsi *BD*. Eodem recidit si centro *i*, intervallo *IH* describatur circulus secans *BD* in *X*, producatur *iX* ad *Y*, ut sit *iY* æqualis *IF*, & agatur *Yf* ipsi *BD* parallela.

Prop. XXIX. Prob. XIX.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.

Figure for Prop. XXIX.

Describenda sit Trajectoria *fghi*, quæ similis sit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes *fg, gh, hi* illius partibus *FG*, *GH*, *HI* similes & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *EC* positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, describatur Trapezium *fghi* quod sit Trapezio *FGHI* simile & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas positione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE* singuli singulas dicto ordine. Dein (per Lem. XXVII) circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ lineæ *FGHI* consimilis.

Scholium.

Figure for Scholium.

Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeq; *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde aguntur *KM*, *LN*, quarum *KM* constituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, sitq; ad *AK* ut est *HI* ad *GH*; & *LN* constituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, sitq; ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALK*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant, & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitq; *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *QPf*, quæ cum recta *AED* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæq; *AB* occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & si super linea *fi* eodem quoq; literarum ordine constituatur Trapezium *fghi* Trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur Trajectoria specie data, solvetur Problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum orbibus inventis determinemus.

SECT. VI.

De inventione motuum in Orbibus datis.

Prop. XXX. Prob. XXII.

Figure for Prop. XXX.

> *Corporis in data Trajectoria Parabolica moventis, invenire locum ad tempus assignatum.*

Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis Parabolæ, sitq; $4AS \times M$ area Parabolica *APS*, quæ radio *SP*, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit area illa ex tempore ipsi proportionali. Biseca *AS* in *G*, erigeq; perpendiculum *GH* æquale 3*M*, & circulus centro *H*, intervallo *HS* descriptus secabit Parabolam in loco quæsito *P*. Nam demissa ad axem perpendiculari *PO*, est $HGq. + GSq.$ ($= HSq. = HPq. = GOq. + PO - HGq.$) $= GOq. + HGq. - 2HG \times PO + POq.$ Et deleto utrinq; *HGq.* fiet $GSq. = GOq. - 2HG \times PO + POq.$ seu $2HG \times PO$ ($= GOq. + POq. - GSq. = AOq. - 2GAO + POq.$) $= AOq. + \frac{3}{4}POq.$ Pro *AOq.* scribe $AO \times POq. \div 4AS$, & applicatis terminis omnibus ad 3*PO*, ductisq; in 2*AS*, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS$ ($= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \{AO + 3AS\} \div 6 \times PO = \{4AO - 3SO\} \div 6 \times PO =$ areæ $APO - SPO$) $=$ areæ *APS*. Sed *GH* erat 3*M*, & inde $\frac{4}{3}HG \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area *APS* æqualis est $4AS \times M$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc *GH* est ad *AS*, ut tempus quo corpus descripsit arcum *AP* ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem *A* & perpendiculum ad axem ab umbilico *S* erectum.

Corol. 2. Et circulo *ASP* per corpus movens perpetuo transeunte, velocitas puncti *H* est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice *A*, ut 3 ad 8; adeoq; in ea etiam ratione est linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab *A* ad *P*, ea cum velocitate quam habuit in vertice *A*, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam viceversa inveniri potest tempus quo corpus

descripsit arcum quemvis assignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

Lemma XXVIII.

Nulla extat figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatq; semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem longitudo. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si area Oualis per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo; quæ huic areæ proportionalis est, adeoq; omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, adeoq; ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenitur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum sectionum Conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoq; & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones Sectionum Conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & plusquam solida ad solida. Eadem de causa intersectiones binæ rectarum & sectionum Conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & curvarum tertiæ potestatis

per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo intersectiones numero infinitæ rectarum, propterea quod omnium eadem est lex & idem calculus, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus omnes possunt simul exhiberi. Si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum una cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæq; prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoq; una eademq; exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi.

Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem Curuarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasq; (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometrice irrationalem ut sequitur.

Prop. XXXI. Prob. XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moventis invenire locum ad tempus assignatum.

Figure for Prop. XXXI.

Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, *O* centrum, sitq; *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G* ut sit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroq; *O* & intervallo *OG* describe circulum *EFG*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A* describendo Trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut est tempus quo corpus progrediendo ab *A* descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens Trochoidi in *L*, & acta *LP* ipsi *KG* parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito *P*.

Nam centro *O* intervallo *OA* describatur semicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* producta in *Q*, junganturq; *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in eandem *OQ* demittatur perpendiculum *SR*. Area *APS* est ut area *AQS*, id est, ut differentia inter sectorem *OQA* & triangulum *OQS*, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}Q \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum *AQ* & rectam *SR*, adeoq; (ob æqualitatem rationum *SR* ad sinum arcus *AQ*, *OS* ad *OA*, *OA* ad *OG*, *AQ* ad *GF*, & divisim *AQ* - *SR* ad *GF* - sin. arc. *AQ*) ut *GK* differentia inter arcum *GF* & sinum arcus *AQ*. *Q. E. D.*

Scholium.

Figure for Scholium.

Cæterum ob difficultatem describendi hanc curvam præstat constructiones vero proximas in praxi Mechanica adhibere. Ellipseos cujusvis *APB* sit *AB* axis major, *O* centrum, *S* umbilicus, *OD* semiaxis minor, & *AK* dimidium lateris recti. Secetur *AS* in *G*, ut sit *AG* ad *AS* ut *BO* ad *BS*; & quæratur longitudo *L*, quæ sit ad $\frac{1}{2}GK$ ut est *AO quad.* ad rectangulum $AS \times OD$. Bisecetur *OG* in *C*, centroq; *C* & intervallo *CG* describatur semicirculus *GFO*. Deniq; capiatur angulus *GCF* in ea ratione ad angulos quatuor rectos, quam habet tempus datum, quo corpus descripsit arcum quæsitum *AP*, ad tempus

periodicum seu revolutionis unius in Ellipsi: Ad *AO* demittatur normalis *FE*, & producatur eadem versus *F* ad usq; *N*, ut sit *EN* ad longitudinem *L*, ut anguli illius sinus *EF* ad radium *CF*; centroq; *N* & intervallo *AN* descriptus circulus secabit Ellipsin in corporis loco quæsito *P* quam proxime.

Nam completo dimidio temporis periodici, corpus *P* semper reperietur in Apside summa *B*, & completo altero temporis dimidio, redibit ad Apsidem imam, ut oportet. Ubi vero proxime abest ab Apsidibus, ratio prima nascentium sectorum *ASP*, *GCF*, & ratio ultima evanescentium *BSP* & *OCF*, eadem est rationi Ellipseos totius ad circulum totum. Nam punctis *P*, *F* & *N* incidentibus in loca *p*, *f* & *n* axi *AB* quam proximis; ob æquales *An*, *pn*, recta *nq*, quæ ad arcum *Ap* perpendicularis est, adeoq; concurrit cum axe in puncto *K*, bisecat arcum *Ap*. Proinde est ½*Ap* ad *Gn* ut *AK* ad *GK*, & *Ap* ad *Gn* ut 2*AK* ad *GK*. Est & *Gn* ad *Gf* ut *EN* ad *EF*, seu *L* ad *CF*, id est, ut $\{GK \times AOq.\} \div \{2AS \times OD\}$ ad *CF*, seu $GK \times AOq.$ ad $2AS \times OD \times CF$, & ex æquo *Ap* ad *Gf* ut 2*AK* ad $GK + GK \times AOq.$ ad $2AS \times OD \times CF$, id est, ut $AK \times AOq.$ ad $AS \times OD \times CF$, hoc est, ob æqualia $AK \times AO \times ODq.$ ut $AO \times OD$ ad $AS \times CF$. Proinde $Ap \times \frac{1}{2}AS$ est ad $Gf \times \frac{1}{2}GC$ ut $AO \times OD \times AS$ ad $AS \times CF \times GC$, seu $AO \times OD$ ad *CGq.* id est, sector nascens *ASp* ad sectorem nascentem *GCf* ut $AO \times OD$ ad *CGq.* & propterea ut area Ellipseos totius ad aream circuli totius. *Q. E. D.* Argumento prolixiore probari potest analogia ultima in Sectoribus evanescentibus *BSP*, *OCF*: ideoq; locus puncti *P* prope Apsides satis accurate inventus est. In quadraturis error quasi quingentesimæ partis areæ Ellipseos totius vel paulo major obvenire solet: qui tamen propemodum evanescet per ulteriorem Constructionem sequentem.

Per puncta *G*, *O*, duc arcum circularem *GTO* justæ magnitudinis; dein produc *EF* hinc inde ad *T* & *N* ut sit *EN* ad *FT* ut ½*L* ad *CF*; centroq; *N* & intervallo *AN* describe circulum qui secet Ellipsin in *P*, ut supra. Arcus autem *GTO* determinabitur quærendo ejus punctum aliquod *T*; quod constructionem in illo casu accuratam reddet.

Si Ellipseos latus transversum multo majus sit quam latus rectum, & motus corporis prope verticem Ellipseos desideretur, (qui casus in Theoria Cometarum incidit,) educere licet e puncto *G* rectam *GI* axi *AB* perpendicularem, & in ea ratione ad *GK* quam habet area *AVPS* ad rectangulum $AK \times AS$; dein centro *I* & intervallo *AI* circulum

describere. Hic enim secabit Ellipsim in corporis loco quæsito P quamproxime. Et eadem constructione (mutatis mutandis) conficitur Problema in Hyperbola. Hæ autem constructiones demonstrantur ut supra, & si Figura (vertice ulteriore B in infinitum abeunte) vertatur in Parabolam, migrant in accuratam illam constructionem Problematis XXII.

Figure for Scholium.

Si quando locus ille P accuratius determinandus sit, inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57,29578 quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia SH ad Ellipseos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem superiorem (vel utcunq; conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P quam proxime. Demissaq; ad axem Ellipseos ordinatim applicata PR, ex proportione diametrorum Ellipseos, dabitur circuli circumscripti AQB ordinatim applicata RQ, quæ sinus est anguli ACQ existente AC radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos ut est tempus quo corpus descripsit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli ACQ ad Radium, & angulus E ad angulum $N - ACQ + D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli $ACQ + \frac{1}{2}D$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli $ACQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - ACQ - E + F$ ut est longitudo L ad Longitudinem eandem cosinu anguli $ACQ + E + \frac{1}{2}F$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $ACQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - ACQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $ACQ + E + G + \frac{1}{2}H$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Deniq; capiatur angulus ACq æqualis angulo $ACQ + E + G + I$ &c. & ex cosinu ejus Cr & ordinata pr, quæ est ab sinum qr ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Siquando angulus $N - ACQ + D$ negativus est, debet signum $+$ ipsius E ubiq; mutari in $-$, & signum $-$ in $+$.

Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli $N - ACQ - E + F$, & $N - ACQ - E - G + H$ negative prodeunt. Convergit autem series infinita $ACQ + E + G + I$ quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS sit ut differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium CQ perpendiculariter demissam.

Figure for Scholium.

Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus centrum C, Vertex A, Umbilicus S & Asymptotos CK. Cognoscatur quantitas areæ APS tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de positione rectæ SP, quæ aream illam abscindat quamproxime. Jungatur CP, & ab A & P ad Asymptoton agantur AI, PK Asymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eiq; æqualis area CPA, quæ subducta de triangulo CPS relinquet aream APS. Applicando arearum A & APS semidifferentiam $\frac{1}{2}APS - \frac{1}{2}A$ vel $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis est, orietur longitudo PQ. Capiatur autem PQ inter A & P, si area APS major sit area A, secus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratius. Et computatione repetita invenietur idem accuratius in perpetuum.

Atq; his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum usibus Astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus AO, OB, OD semiaxibus Ellipseos, (*Vide fig. pag. 109. 110.*) & L ipsius latere recto, quære tum angulum Y, cujus Tangens sit ad Radium ut est semiaxium differentia $AO - OD$ ad eorum summam $AO + OD$; tum angulum Z, cujus tangens sit ad Radium ut rectangulum sub umbilicorum distantia SH & semiaxium differentia $AO - OD$ ad triplum rectangulum sub OQ semiaxe minore & $AO - \frac{1}{4}L$ differentia inter semiaxem majorem & quartam partem lateris recti. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut est sinus anguli T duplicati ad radium; atq; angulum X (æquationem secundam) ad angulum Z

(æquationem maximam secundam) ut est sinus versus anguli *T* duplicati ad radium duplicatum, vel (quod eodem recidit) ut est quadratum sinus anguli *T* ad quadratum Radii. Angulorum *T*, *V*, *X* vel summæ *T* + *X* + *V*, si angulus *T* recto minor est, vel differentiæ *T* + *X* - *V*, si is recto major est rectisq; duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) & si *HP* occurrat Ellipsi in *P*, acta *SP* abscindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum *V* & *X* (in minutis secundis, si placet, positorum) figuras duas tresve primas invenire sufficit. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *HSP* & distantia *SP* in promptu sunt per methodum notissimam Dris. *Sethi Wardi* Episcopi *Salisburiensis* mihi plurimum colendi.

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

SECT. VII.

De Corporum Ascensu & Descensu Rectilineo.

Prop. XXXII. Prob. XXIV.

Figure for Prop. XXXII.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter describet id sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus inferior congruit cum centro. Id ex Propositionibus XI, XII, XIII & earum Corollariis constat. Sit sectio illa Conica *ARPB* & umbilicus inferior *S*. Et primo si Figura illa Ellipsis est, super hujus axe majore *AB* describatur semicirculus *ADB*, & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actisq; *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atq; adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipseos, & semper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaq; spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*

Figure for Cas. 2. and 3.

Cas. 2. Sin figura superior *RPB* Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BD*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, singulæ ad singulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB*

proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PB*, erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum recta *CB*, & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*

Cas. 3. Et simili argumento si figura *RPB* Parabola est, & eodem vertice principali *B* describatur alia Parabola *BED*, quæ semper maneat data, interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus Latere recto, conveniat cum linea *CB*, fiet segmentum Parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* descendet ad centrum *B*. *Q. E. I.*

Prop. XXXIII. Theor. IX.

> *Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in dimidiata ratione quam* CA*, distantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ vertice ulteriore* A*, habet ad figuræ semidiametrum principalem* ½AB.

Figure for Prop. XXXIII.

Namq; ob proportionales *CD*, *CP*, linea *AB* communis est utriusq; figuræ *RPB*, *DEB* diameter. Bisecetur eadem in *O*, & agatur recta *PT* quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atq; etiam secet communem illam diametrum *AB* (si opus est productam) in *T*; sitq; *SY* ad hanc rectam & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atq; figuræ *RPB* latus rectum ponatur *L*. Constat per Cor. 9. Theor. VIII. quod corporis in linea *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* sit ad velocitatem corporis intervallo *SP* circa idem centrum circulum describentis in dimidiata ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad *SY* quadratum. Est autem ex Conicis *ACB* ad *CPq.* ut $2AO$ ad *L*, adeoq; $2CPq. \times AO \div ACB$ æquale *L*. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in dimidiata ratione $CPq. \times AO \times SP \div ACB$ ad *SY quad.* Porro ex

Conicis est CO ad BO ut BO ad TO, & composite vel divisim ut CB ad BT. Unde dividendo vel componendo fit BO - uel + CO ad BO ut CT ad BT, id est AC ad AO ut CP ad BQ; indeq; $CPq. \times AO \times SP \div ACB$ æquale est $BQq. \times AC \times SP \div \{AO \times BC\}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP, sic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumq; S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaq; SY cum linea BQ; & corporis jam recta descendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B interuallo BC circulum describentis, in dimidiata ratione ipsius $BQq. \times AC \times SP \div \{AO \times BC\}$ ad $SYq.$ hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & $BQq.$ ad $SYq.$) in dimidiata ratione AC ad AO. *Q. E. D.*

Corol. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad ST ut AC ad AO.

Prop. XXXIV. Theor. X.

Si figura BED *Parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *circulum uniformiter describere potest.*

Figure for Prop. XXXIV.

Nam corporis Parabolam RPB circa centrum S describentis velocitas in loco quovis S (per Corol. 7. Theor. VIII) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli SP circulum circa idem S uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus Parabolicus PfB cum recta CB, centrum S cum vertice B, & interuallum SP cum intervallo BP coincidat, & constabit Propositio. *Q. E. D.*

Prop. XXXV. Theor. XI.

Iisdem positis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Figure for Prop. XXXV.

Nam concipe corpus C quam minima temporis particula lineolam Cc cadendo describere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk describere. Erigantur perpendicula CD, cd occurrentia figuræ DES in D, d. Jungantur SD, SK, Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T, & ad eam demittatur perpendiculum SY.

Cas. 1. Jam si figura DES Circulus est vel Hyperbola, bisecetur ejus transversa diameter AS in O, & erit SO dimidium Lateris recti. Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd, & TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed per Corol. Prop. 33. est TC ad ST ut AC ad AO, puta si in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC est ad AO, id est ad SK, ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis descendentis velocitas in C est ad velocitatem corporis circulum intervallo SC circa centrum S describentis in dimidiata ratione AC ad AO vel SK (per Theor. IX.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum OKk in dimidiata ratione SK ad SC per Cor. 6. Theor. IV. & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola Cc ad arcum Kk in dimidiata ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD. Quare est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeq; $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}SY \times Dd$, id est area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, SDd, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q. E. D.*

Figure for Cas. 2.

Cas. 2. Quod si figura DES Parabola sit, invenietur ut supra $CD \times Cc$ esse ad $SY \times Dd$ ut TC ad ST, hoc est ut 2 ad 1, adeoq; $\frac{1}{4}CD \times Cc$ æqualem esse $\frac{1}{2}SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2}SC$ uniformiter describi possit (per Theor. X.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk est

in dimidiata ratione *SK* ad ½*Sc*, id est, in ratione *SK* ad ½*CD*, per Corol. 6. Theorem. IV. Quare est $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}CD \times Cc$, adeoq; æquale $\frac{1}{2}SY \times Dd$, hoc est, area *KSk* æqualis Areæ *SDd*, ut supra. *Quod erat demonstrandum.*

Prop. XXXVI. Prob. XXV.

Figure for Prop. XXXVI.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora descensus.*

Super diametro *AS* (distantia corporis a centro sub initio) describe semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue Sectionem *OSK*. Patet per Theor. XI, quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Quod erat faciendum.*

Prop. XXXVII. Prob. XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

Figure for Prop. XXXVII.

Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *ASG* cum velocitate quacunq;. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *CA* ad ½*AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* cadet ad infinitam distantiam, quo in casu Parabola uertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto describenda est.

Patet hoc per Theorema X. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. Patet per Theorema IX. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur circulus *HKk*, & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, *SD*, fiant segmentis *SEIS*, *SEDS* Sectores *HSK*, *HSk* æquales, & per Theorema XI. corpus *G* describet spatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* describere potest arcum *Kk*. Q. E. F.

Prop. XXXVIII. Theor. XII.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcubus arcuumq; sinibus versis & sinibus rectis respective proportionales.

Figure for Prop. XXXVIII.

Cadat corpus de loco quovis *A* secundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, describatur circuli quadrans *AE*, sitq; *CD* sinus rectus arcus cujusvis *AD*, & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo describet spatium *AC*, inq; loco *C* acquisierit velocitatem *CD*. Demonstratur eodem modo ex Propositione X. quo Propositio XXXII. ex Propositione XI. demonstrata fuit. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo provenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usq; centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

Prop. XXXIX. Prob. XXVII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta, & concessis figurarum

curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

Figure for Prop. XXXIX.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deq; loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitq; *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut areæ curvilineæ *ABGE* latus quadratum. *Q. E. I.* In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areæ *ABGE* reciproce proportionalis, & sit *ALM* linea curva quam punctum *M* perpetuo tangit, & erit tempus quo corpus cadendo describit lineam *AE* ut area curvilinea *ALME*. *Quod erat Inveniendum.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, sitq; *DLF* locus lineæ *EMG* ubi corpus versabatur in *D*; & si ea sit vis centripeta, ut area *ABGE* latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in *D* & *E* scribantur V & $V + I$, erit area *ABFD* ut V^2, & area *ABGE* ut $V^2 + 2VI + I^2$, & divisim area *DFGE* ut $2VI + I^2$, adeoq; $DFGE \div DE$ ut $\{2I \times V + \frac{1}{2}I\} \div DE$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo *DF* ut quantitas $2I \times V \div DE$, adeoq; etiam ut quantitatis hujus dimidium $I \times V \div DE$. Est autem tempus quo corpus cadendo describit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas *V* inverse, estq; vis ut velocitatis incrementum *I* directe & tempus inverse, adeoq; si primæ nascentium rationes sumantur, ut $I \times V \div DE$, hoc est, ut longitudo *DF*. Ergo vis ipsi *DF* vel *EG* proportionalis facit corpus ea cum velocitate descendere quæ sit ut areæ *ABGE* latus quadratum. Q. E. D.

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* describatur, sit ut velocitas, adeoq; ut areæ *ABFD* latus quadratum inverse; sitq; *DL*, atq; adeo areæ nascens *DLME*, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area *DLME*, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea *AE* describitur ut area tota *AME*. Q. E. D.

Corol. 1. Si *P* sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi ui centripeta nota (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunq; cadens acquisivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ sit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eiq; æqualis abscindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namq; completo rectangulo *EDRS*, cum sit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut *VV* ad $2V \times I$, adeoq; ut ½*V* ad *I*, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintq; incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, adeoq; ut areæ nascentes *DFGE*, *DRSE*; erunt (ex æquo) areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunq; *D* data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut est latus quadratum rectanguli *PQRD* area curvilinea *DFge* vel aucti, si locus *e* est loco *D* inferior, vel diminuti, si is superior est, ad latus quadratum rectanguli solius *PQRD*, id est ut $\sqrt{PQRD}$ + vel - *DFge* ad $\sqrt{PQRD}$.

Corol. 3. Tempus quoq; innotescet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel - *DFge*, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum $2PD \times DL$. Namq; tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam *PD* est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam *PE* in dimidiata ratione *PD* ad *PE*, id est (lineola *DE* jamjam nascente) in ratione *PD* ad *PD* + ½*DE* seu 2*PD* ad 2*PD* + *DE*, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam *DE* ut 2*PD* ad *DE*, adeoq; ut rectangulum $2PE \times DL$ ad aream *DLME*; estq; tempus quo corpus utrumq; descripsit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam *De* ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLme*.

SECT. VIII.

De Inventione Orbium in quibus corpora viribus quibuscunq; centripetis agitata revolventur.

Prop. XL. Theor. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunq; centripeta, moveatur utcunq;, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq; eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Figure for Prop. XL.

Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæq; *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitq; circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & si vis una *IN*, per Legum Corol. 2. resolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietq; ipsum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inq; via curvilinea *ITKk*, progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ *DE* & *IK*, adeoq; accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* & *IK*, sunt ut *DE* &

IT, *DE* & *IK* conjunctim, id est ut *DE quad.* & $IT \times IK$ rectangulum. Sed rectangulum $IT \times IK$ æquale est *IN quadrato*, hoc est, æquale *DE quadrato* & propterea accelerationes in transitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. Q. E. D. Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintq; velocitates eorum in eadem quacunq; altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunq; æqualibus altitudinibus æquales. Namq; impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas *P* sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunq; revolvens, deq; quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitq; quantitas *A* distantia corporis a centro in alio quovis Orbis puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius *A* dignitas quælibet A^{n-1}, cujus Index $n - 1$ est numerus quilibet *n* unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine *A* erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$, atq; adeo datur. Namq; velocitas ascendentis ac descendentis (per Prop. XXXIX.) est in hac ipsa ratione.

Prop. XLI. Prob. XXVIII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Figure for Prop. XLI.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit Trajectoria *VITKk*. Detur circulus *VXY* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroq; eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam

secantes in *I* & *K* rectamq; *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *VY* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VXY* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *T* & *K* ad *k*; sitq; *A* altitudo illa de qua corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & stantibus quæ in Propositione XXXIX, quoniam lineola *IK*, dato tempore quam minimo descripta, est ut velocitas atq; adeo ut latus quadratum areæ *ABFD*, & triangulum *ICK* tempori proportionale datur, adeoq; *KN* est reciproce ut altitudo *IC*, id est, si detur quantitas aliqua *Q*, & altitudo *IC* nominetur *A*, ut $Q \div A$; quam nominemus *Z*. Ponamus eam esse magnitudinem ipsius *Q* ut sit $\sqrt{ABFD}$ in aliquo casu ad *Z* ut est *IK* ad *KN*, & erit semper $\sqrt{ABFD}$ ad *Z* ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad *ZZ* ut *IK quad.* ad *KN quad.* & divisim *ABFD* - *ZZ* ad *ZZ* ut *IN quad.* ad *KN quad.* adeoq; $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad *Z* ut *IN* ad *KN*, & propterea $A \times KN$ æquale $Q \times IN \div \sqrt{ABFD - ZZ}$. Unde cum $YX \times XC$ sit ad $A \times KN$ in duplicata ratione *YC* ad *KC*, erit rectang. $YX \times XC$ æquale $Q \times IN \times CX\ quad. \div AA\sqrt{ABFD - ZZ}$. Igitur si in perpendiculo *DF* capiantur semper *Db*, *Dc* ipsis $Q \div 2\sqrt{ABFD - ZZ}$ & $Q \times CX\ quad. \div 2AA\sqrt{ABFD - ZZ}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ *ab*, *cd* quas puncta *b*, *c* perpetuo tangunt; deq; puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *Vad* abscindens areas curvilineas *VDba*, *VDdc*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu *DbzE* æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$, seu triangulo *ICK*; & rectangulum $Dc \times IN$ seu $Dc \times E$ æquale est dimidio rectanguli *YX* in *CX*, seu triangulo *XCY*; hoc est, quoniam arearum *VDba*, *VIC* æquales semper sunt nascentes particulæ *DbzE*, *ICK*, & arearum *VDcd*, *VCX* æquales semper sunt nascentes particulæ *DExc*, *XCY*, erit area genita *VDba* æqualis areæ genitæ, *VIC*, adeoq; tempori proportionalis, & area genita *VDdc* æqualis Sectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco *V*, dabitur area ipsi proportionalis *VDba*, & inde dabitur corporis altitudo *CD* vel *CI*; & area *VDcd*, eiq; æqualis Sector *VCX* una cum ejus angulo *VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*, in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæq; corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Incidunt enim Apsides in puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam *VIK*: id quod fit ubi rectæ *IK* & *NK*

æquantur, adeoq; ubi area *ABFD* æqualis est *ZZ*.

Corol. 2. Sed & angulus *KIN*, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam *IC*, ex data corporis altitudine *IC* expedite invenitur, nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id est ut *Z* ad latus quadratum areæ *ABFD*.

Figures for Corol. 3.

Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali *V* describatur sectio quælibet Conica *VRS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur Tangens *RT* occurrens axi infinite producto *CV* in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis sit abscissæ *CT*, angulumq; *VCP* Sectori *VCR* proportionalem constituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco *V* justa cum velocitate secundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum *P* perpetuo tangit; adeoq; si conica sectio *CVRS* Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunq; cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incæperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique ascendere, figura *CVRS* vel Hyperbola sit vel Ellipsis, inveniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed et vi centripeta in centrifugam versa, ascendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ* quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem: ut supra. Consequuntur hæc omnia ex Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem ut satis facilem brevitatis gracia missam facio.

Prop. XLII. Prob. XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* secundum lineolam *IT*, ea cum velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitq; hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum

urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*; centroq; *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *ALMm*, *BFGg*, *abzv*, *dcxw* ordinatim applicatæ *em*, *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataq; lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ *BFGg*, *ALMm*, per constructionem Problematis XXVIII. & ejus *Corol. 1*. Deinde ex dato angulo *CIT* datur proportio nascentium *IK*, *KN* & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas *Q*, una cum curvis lineis *abzv*, *dcxw*: adeoq; completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eiq; æqualis Sector *XCy*, angulusq; *XCy* & locus *k* in quo corpus tunc versabitur.   Q. E. I.

Supponimus autem in his Propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunq; quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undiq; eandem. Atq; hactenus corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

SECT. IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deq; motu Apsidum.

Prop. XLIII. Prob. XXX.

Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunq; circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atq; corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.

In Orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumq; *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & area quam linea *Cp* describit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* describit, ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoq; in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripeta, revolvi possit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus *VCv* angulo *PCp*, & linea *Cv* lineæ *CV*, atq; figura *vCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* Figure for Prop. XLIII. & XLIV. semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *vCp*, eodemq; tempore describet arcum ejus *vp* quo corpus aliud *P* arcum ipsi similem & æqualem *VP* in figura quiescente *VPK* describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium Propositionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi possit in curva illa linea quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur Problema. Q. E. F.

Prop. XLIV. Theor. XIV.

Differentia virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis *VP*, *PK* sunto similes & æquales orbis revolventis partes *vp*, *pk*. A puncto *k* in rectam, *pC* demitte

perpendiculum *kr*, idemq; produc ad *m*, ut sit *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC* semper æquantur, manifestum est quod si corporum in locis *P* & *p* existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, (quorum hi versus centrum, sive secundum lineas *PC*, *pC*; alteri prioribus transversi secundum lineas ipsis *PC*, *pC* perpendiculares determinantur) motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis *p* erit ad motum transversum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC* ad motum angularem lineæ *PC*, id est ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu suo utroq; pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur a *P* versus *C*, adeoq; completo illo tempore reperietur alicubi in linea *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *pC* perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam a linea *pC*, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum acquirit a linea *PC*, ut est hujus motus transversus ad motum transversum alterius. Quare cum *kr* æqualis sit distantiæ quam corpus alterum acquirit a linea *pC*, sitq; *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, hoc est, ut motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis *P*, manifestum est quod corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita se habebunt ubi corpora *P* & *p* æqualiter secundum lineas *pC* & *PC* moventur, adeoq; æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pCn* ad angulum *pCk* ut est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, sitq; *nC* æqualis *kC*, & corpus *p* completo illo tempore revera reperietur in *n*; adeoq; vi majore urgetur, si modo angulus *mCp* angulo *kCp* major est, id est si orbis *Vpk* movetur in consequentia, & minore, si orbis regreditur; estq; virium differentia ut locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipsius actione, dato illo temporis spatio transferri debet. Centro *C* intervallo *Cn* vel *Ck* describi intelligetur circulus secans lineas *mr*, *mn* productas in *s* & *t*, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoq; *mn* æquale $mk \times ms \div mt$. Cum autem triangula *pCk*, *pCn* dentur magnitudine, sunt *kr* & *mr*, earumq; differentia *mk* & summa *ms* reciproce ut altitudo *pC*, adeoq; rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis *pC*. Est & *mt* directe ut $\frac{1}{2}mt$, id est ut altitudo *pC*. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $mk \times ms \div mt$, id est lineola nascens *mn*, eiq; proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis *pC*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis *P* & *p* vel *K* & *k* est ad vim qua corpus motu circulari revolvi posset ab *r* ad *k*, eodem tempore quo corpus *P* in orbe immobili describit arcum *PK*, ut $mk \times ms$ ad *rk* quadratum; hoc est si capiantur datæ quantitates *F*, *G* in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut *Gq.* - *Fq.* ad *Fq.* Et propterea, si centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* describatur Sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit, differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo descripta sit area *VPC*, uniformiter describere potuisset, ut *Gq.* - *Fq.* ad *Fq.* Namq; sector ille & area *pCk* sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* Ellipsis sit umbilicum habens *C* & Apsidem summam *V*; eiq; similis & æqualis ponatur Ellipsis *vpk*, ita ut sit semper *pc* æqualis *PC*, & angulus *VCp* sit ad angulum *VCP* in data ratione *G* ad *F*; pro altitudine autem *PC* vel *pc* scribatur *A*, & pro Ellipseos latere recto ponatur 2*R*: erit vis qua corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut *Fq.* ÷ *Aq.* + {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipsi per quantitatem *Fq.* ÷ *Aq.*, & vis in *V* erit *Fq.* ÷ *CV quad.* Vis autem qua corpus in circulo ad distantiam *CV* ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in *V*, est ad vim qua corpus in Ellipsi revolvens urgetur in Apside *V*, ut dimidium lateris recti Ellipseos ad circuli semidiametrum *CV*, adeoq; valet *RFq.* ÷ *CV cub.*: & vis quæ sit ad hanc ut *Gq.* - *Fq.* ad *Fq.*, valet {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *CV cub.*: estq; hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium quibus corpus *P* in Ellipsi immota *VPK*, & corpus *p* in Ellipsi mobili *vpk* revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine *A* sit ad seipsam in altitudine *CV* ut 1 ÷ *A cub.* ad 1 ÷ *CV cub.*, eadem differentia in omni altitudine *A* valebit {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* Igitur ad vim *Fq.* ÷ *Aq.* qua corpus revolvi potest in Ellipsi immobili *VPK*, addatur excessus {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* & componetur vis tota *Fq.* ÷ *Aq.* + {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* qua corpus in Ellipsi mobili *vpk* iisdem temporibus revolvi possit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobilis *VPK* Ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eiq; similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *vpk*, sitq; 2*R* Ellipseos hujus latus

rectum, & $2T$ latus transversum atq; angulus *VCp* semper sit ad angulum *VCP* ut *G* ad *F*; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $Fq.A \div T\,cub.$ & $Fq.A \div T\,cub. + \{RGq. - RFq.\} \div A\,cub.$ respective.

Figure for
Corol. 6.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur *T*, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur *R*, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunq; immobili *VPK* revolvi potest, in loco *V* dicatur {*Fq.* ÷ *Tq.*} *V*, atq; aliis in locis *P* indefinite dicatur *X*, altitudine *CP* nominata *A*, & capiatur *G* ad *F* in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eosdem motus in eadem Trajectoria *vpk* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium *X* + {*VRGq.* - *VRFq.*} ÷ *A cub.*

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunq; immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturq; *PC*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Est autem hæc Curva *Vpk* eadem cum Curva illa *VPQ* in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

Prop. XLV. Prob. XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in Ellipsi mobili, ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3. revolvens, describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides orbis quem corpus

illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* Apsis summa, & scribantur *T* pro altitudine maxima *CV*, *A* pro altitudine quavis alia *CP* vel *Cp*, & *X* pro altitudinum differentia *CV* - *CP*; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum ejus *C* (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæq; in Corollario 2. erat ut *Fq.* ÷ *Aq.* + {*RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.* id est ut {*Fq. A* + *RGq.* - *RFq.*} ÷ *A cub.*, substituendo *T* - *X* pro *A*, erit ut {*RGq.* - *RFq.* + *TFq.* - *Fq.X*} ÷ *A cub.* Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit *A cub.* & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis parebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoq; ut *A cub.* ÷ *A cub.*, sive (scribendo *T* - *X* pro *A* in Numeratore) ut {*T cub.* - 3*Tq.X* + 3*TXq.* - *X cub.*} ÷ *A cub.*; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet *RGq.* - *RFq.* + *TFq.* ad *T cub.* ut -*Fq.X* ad -3*Tq.X* + 3*TXq.* - *X cub.* sive ut -*Fq.* ad -3*Tq.* + 3*TX* - *Xq.* Jam cum Orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas *R*, *T* æquales, atq; *X* in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt *RGq.* ad *T cub.* ut -*Fq.* ad -3*Tq.* seu *Gq.* ad *Tq.* ut *Fq.* ad 3*Tq.* & vicissim *G quadrat.* ad *F quadrat.* ut *T quad.* ad 3*T quad.* id est, ut 1 ad 3; adeoq; *G* ad *F*, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP* ut 1 ad √3. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atq; adeo in orbe immobili de quo agimus, ab Abside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum 180 ÷ √3: id adeo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum 180 ÷ √3 graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam, ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens, ubi iterum

confecit eundem angulum, & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $A^n \div A^3$: ubi $n - 3$ & n significant dignitatum indices quoscunq; integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $T - X^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \{nn - n\} \div 2\, Xq.T^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGq. - RFq. + TFq. - Fq.X$, fit $RGq. - RFq. + TFq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1} + \{nn - n\} \div 2\, XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $RGq.$ ad T^n ut $-Fq.$ ad $-nT^{n-1}$, seu $Gq.$ ad T^{n-1} ut $Fq.$ ad nT^{n-1}, & vicissim $Gq.$ ad $Fq.$ ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; adeoq; G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam in Ellipsi confectus, sit graduum 180, conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam in Orbe propemodum circulari, quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $180 \div \sqrt{n}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad Apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est ut A seu $A^4 \div A^3$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{4}$ æqualis 2; adeoq; angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $180 \div 2$ *gr.* seu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $1 \div A$ seu $A^2 \div A^3$, erit $n = 2$, adeoq; inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $180 \div \sqrt{2}$ seu 127 *gr.* 17 *min.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut Latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis Altitudinis, id est reciproce ut $A^{11/4}$, adeoq; directe ut $1 \div A^{11/4}$ seu ut $A^{1/4} \div A^3$ erit n æqualis ¼, & $180 \div \sqrt{n}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo

aliam revolutionem integram, redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\{bA^m + cA^n\} \div A$ *cub.* id est ut $\{b$ in $T - X^m + c$ in $T - X^n\} \div A$ *cub.* seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m - mbXT^{m-1} + \{mm - m\} \div 2\, bX^2T^{m-2} + cT^n - ncXT^{n-1} + \{nn - n\} \div 2\, cX^2T^{n-2} \text{ \&c.}}{A \text{ cub.}}$$

& collatis numeratorum terminis, fiet *RGq.* - *RFq.* + *TFq.* ad $bT^m + cT^n$, ut -*Fq.* ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \{mm - m\} \div 2\, XT^{m-2} + \{nn - n\} \div 2\, XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit *Gq.* ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut *Fq.* ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim *Gq.* ad *Fq.* ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* seu *T* Arithmetice per unitatem, fit *Gq.* ad *Fq.* ut $b + c$ ad $mb + nc$, adeoq; ut 1 ad $\{mb + nc\} \div \{b + c\}$. Unde est *G* ad *F*, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\{\{mb + nc\} \div \{b + c\}\}}$. Et propterea cum angulus *VCP* inter Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus *VCp* inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\{bA^m + cA^n\} \div A$ *cub.* proportionali describit, æqualis angulo graduum 180 $\sqrt{\{\{b + c\} \div \{mb + nc\}\}}$. Et eodem argumento si vis centripeta sit ut $\{bA^m - cA^n\} \div A$ *cub.*, angulus inter Apsides invenietur 180 $\sqrt{\{\{b - c\} \div \{mb - nc\}\}}$ graduum. Nec secus resolvetur Problema in casibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes *A cub.* Dein pars data Numeratoris hujus *RGq.* - *RFq.* + *TFq.* - *Fq.X* ad partem non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoq; unitatem pro *T*, obtinebitur proportio *G* ad *F*.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu Apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut

altitudinis dignitas illa $A^{nn/mm - 3}$, cujus Index est $nn/mm - 3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deq; Apside discedens, si cæperit descendere, nunquam perveniet ad Apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usq; ad centrum, describens curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cæperit illud de Apside discedens vel minimum ascendere, ascendet in infinitum, neq; unquam perveniet ad Apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis in recessu a centro decrescit in majori quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apside discedens, perinde ut cæperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usq; vel ascendet in infinitum. At si vis in recessu a centro vel decrescat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunq; Corpus nunquam descendet ad centrum usq; sed ad Apsidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apside ad Apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, Vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de Apside ad Apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apside summa ad Apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit, hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoq; $nn/mm - 3$ ualeat $1/64 - 3$ vel $1/16 - 3$ vel $1/4 - 3$ vel $4/9 - 3$, erit vis ut $A^{1/64 - 3}$ vel $A^{1/16 - 3}$ vel $A^{1/4 - 3}$ vel $A^{4/9 - 3}$, id est reciproce ut $A^{3 - 1/64}$ vel $A^{3 - 1/16}$ vel $A^{3 - 1/4}$ vel $A^{3 - 4/9}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad Apsidem eandem immotam, erit m ad n ut 1 ad 1, adeoq; $A^{nn/mm - 3}$ æqualis A^{-2} seu $1 \div A^2$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apsidem eandem redierit, erit m ad n ut $3/4$ vel $2/3$ vel $1/3$ vel $1/4$ ad 1, adeoq; $A^{nn/mm - 3}$ æqualis $A^{16/9 - 3}$ vel $A^{9/4 - 3}$ vel $A^{9 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$ & propterea Vis aut reciproce ut $A^{11/9}$ vel $A^{3/4}$, aut directe ut A^6 vel A^{13}. Deniq; si Corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoq; Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in Consequentia gradus tres, erit m ad n ut 363*gr.* ad 360*gr.* adeoq; $A^{nn/mm - 3}$ erit æquale $A^{-265707 \div 131769}$, & propterea Vis

centripeta reciproce ut $A^{265707 \div 131769}$ seu $A^{24/}{}_{243}$. Decrescit igitur Vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $60^3/_4$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $1 \div A^2$, & vis extranea ablata ut cA, adeoq; vis reliqua ut $\{A - cA^4\} \div A^3$; erit (in Exemplis tertiis) A æqualis 1 & n æqualis 4, adeoq; angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180\surd\{\{1 - c\} \div \{1 - 4c\}\}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357,45 vicibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $100 \div 35745$, & $180\surd\{\{1 - c\} \div \{1 - 4c\}\}$ evadet $180\surd\{35645 \div 35345\}$ seu 180,7602, id est 180*gr.* 45*m.* 37*s.* Igitur corpus de Apside summa discedens, motu angulari 180*gr.* 45*m.* 37*s.* perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoq; Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1*gr.* 31*m.* 14*s.*

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunq; datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunq; centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quasq; tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eadem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

SECT. X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deq; Funipendulorum Motu reciproco.

Prop. XLVI. Prob. XXXII.

Posita cujuscunq; generis vi centripeta, datoq; tum virium centro tum plano quocunq; in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato data cum velocitate secundum Rectam in Plano illo datam egressi.

Figure for Prop. XLVI. and XLVII.

Sit *S* centrum virium, *SC* distantia minima centri hujus a plano dato, *P* corpus de loco *P* secundum rectam *PZ* egrediens, *Q* corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & *PQR* Trajectoria illa in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur *CQ*, *QS*, & si in *QS* capiatur *SV* proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum *S*, & agatur *VT* quæ sit parallela *CQ* & occurrat *SC* in *T*: Vis *SV* resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires *ST*, *TV*; quarum *ST* trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera *TV*, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum *C* in plano datum, adeoq; facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis *ST* tolleretur, & corpus vi sola *TV* revolveretur circa centrum *C* in spatio libero. Data autem vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in spatio libero circa centrum datum *C* revolvitur, datur per Prop. XLII. tum Trajectoria *PQR* quam corpus describit, tum locus *Q* in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum deniq; velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. Q. E. I.

Prop. XLVII. Theor. XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunq; revolventia

describent Ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæq; moventur in lineis rectis ultro citroq; discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam stantibus quæ in superiore Propositione; vis *SV* qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur versus centrum *S* est ut distantia *SQ*; atq; adeo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV* qua corpus trahitur versus punctum *C* in Orbis plano datum, est ut distantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* versantia trahuntur versus punctum *C*, sunt pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora unaquaq; trahuntur versus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus in iisdem figuris in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atq; in spatiis liberis circa centrum *S*, adeoq; (per Corol. 2. Prop. X. & Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus semper æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroq; in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. Q. E. D.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroq; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atq; adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

Prop. XLVIII. Theor. XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum

globi.

Prop. XLIX. Theor. XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ Perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Figure for Prop. XLIX.

Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei insistens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* versus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* sibi invicem semper æquentur, atq; punctum illud *P* in Perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea descripta ex quo Rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum sinum versum arcus ½*PB*, ut 2*CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (si opus est producta) occurrat Rotæ in *V*, junganturq; *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur Normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, secetq; *PH* ipsam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur Normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis describatur circulus *nom* secans rectam *CP* in *n*, Rotæ perimetrum *Bp* in *o* & viam curvilineam *AP* in *m*, centroq; *V* & intervallo *Vo* describatur circulus secans *VP* productam in *q*.

Quoniam Rota eundo semper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifestum est quod recta *BP* perpendicularis est ad lineam illam curvam *AP*, quam Rotæ punctum *P* describit, atq; adeo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius sensim auctus æquetur tandem distantiæ *CP*, & ob similitudinem figuræ evanescentis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evanescentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id est ratio incrementorum momentaneorum curvæ *AP*, rectæ *CP* & arcus circularis *BP*, ac decrementi rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* respective. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares sunt,

anguliq; *HVG*, *VCF* propterea æquales; & angulus *VHP*, (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos,) complet angulum *VEP* ad duos rectos, adeoq; angulo *CEP* æqualis est, similia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* seu *HP*, & ita *KI* ad *KP*, & divisim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis consequentibus ut *CB* ad 2*CE* ita *PI* ad *PV*. Est igitur decrementum lineæ *VP*, id est incrementum lineæ *BV* - *VP*, ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2*CE*, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines *BV* - *VP* & *AP* incrementis illis genitæ sunt in eadem ratione. Sed existente *BV* radio, est *VP* cosinus anguli *VPB* seu ½*BEP*, adeoq; *BV* - *VP* sinus versus ejusdem anguli, & propterea in hac Rota cujus radius est ½*BV*, erit *BV* - *VP* duplus sinus versus arcus ½*BP*. Ergo *AP* est ad duplum sinum versum arcus ½*BP* ut 2*CE* ad *CB*. Q. E. D.

Lineam autem *AP* in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra *ASL* & bisecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus est sinus anguli *VBP*, existente *EB* radio) ut 2*CE* ad *CB* atq; adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad Rotæ diametrum *BV* ut 2*CE* ad *CB*.

Corol. 3. Ideoq; longitudo illa est ut rectangulum *BEC*, si modo Globi detur semidiameter.

Prop. L. Prob. XXXIII.

Figure for Prop. L.

Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum *QVS* centro *C* descriptum detur Cyclois *QRS* bisecta in *R* & punctis suis extremis *Q* & *S* superficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* bisecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut sit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo *CA* describatur Globus exterior *ABD*, & intra hunc globum Rota, cujus diameter sit *AO*, describantur duæ semicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem

tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra semicycloides *AQ*, *AS* oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte sui superiore *AP* applicetur ad semicycloidem illam *APS*, versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteq; reliqua *PT* cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oscillabitur in Cycloide data *QRS*. Q. E. F.

Occurrat enim filum *PT* tum Cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in *V*, agaturq; *CV* occurrens circulo *ABD* in *B*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *PB*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet enim ex genesi Cycloidis, quod perpendicula illa *PB*, *TW*, abscindent de *CV* longitudines *VB*, *VW* rotarum diametris *OA*, *OR* æquales, atq; adeo quod punctum *B* incidet in circulum *ABD*. Est igitur *TP* ad *VP* (duplum sinum anguli *VBP* existente ½*BV* radio) ut *BW* ad *BV*, seu *AO* + *OR* ad *AO*, id est (cum sint *CA* ad *CO*, *CO* ad *CR* & divisim *AO* ad *OR* proportionales,) ut *CA* + *CO* seu 2*CE* ad *CA*. Proinde per Corol. 1. Prop. XLIX. longitudo *PT* æquatur Cycloidis arcui *PS*, & filum totum *APT* æquatur Cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc est (per Corollar. 2. Prop. XLIX) longitudini *AR*. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in Cycloide *QRS*. Q. E. D.

Corol. Filum *AR* æquatur Cycloidis arcui dimidio *APS*.

Prop. LI. Theor. XVIII.

> *Si vis centripeta tendens undiq; ad Globi centrum* C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusq; a centro, & hac sola vi agente Corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis* QRS*: dico quod oscillationum utcunq; inæqualium æqualia erunt Tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus *T* impellitur versus *C* est ut distantia *CT*, (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* distendit filum *PT* & per cujus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX* urgendo corpus transversim seu versus *X*, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est

quod corporis acceleratio huic vi acceleratrici proportionalis sit singulis momentis ut longitudo *TX*, id est, ob datas *CV*, *WV* iisq; proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis *TR*. Pendulis igitur duabus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atq; adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesq; describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumq; vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eosdem arcus Trochoidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atq; adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumq; perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. Q. E. D.

Prop. LII. Prob. XXXIV.

Definire & velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Figure for Prop. LII.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, describe semicirculum *HKMG* semidiametro *GK* bisectum. Et si vis centripeta distantiis locorum a centro proportionalis tendat ad centrum *G*, sitq; ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* (*Vide Fig. Prop. L. & LI.*) ad ipsius centrum tendente; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco supremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt

æquales sub initio & spatiis describendis *TR*, *GL* semper proportionales, atq; adeo, si æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa describere spatia *ST*, *HL* æqualia sub initio, adeoq; subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. XXXVIII., tempus quo corpus describit arcum *ST* est ad tempus oscillationis unius, ut arcus *HI* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*) ad semicirculum *HKM* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*.) Et velocitas corporis penduli in loco *T* est ad velocitatem ipsius in loco infimo *R*, (hoc est velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, seu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, sive ut √*SRq*. - *TRq*. ad *SR*. Unde cum in Oscillationibus inæqualibus describantur æqualibus temporibus arcus totis Oscillationum arcubus proportionales, habentur ex datis temporibus & velocitates & arcus descripti in Oscillationibus universis. Quæ erant primo invenienda.

Figures for Prop. LII.

Oscillentur jam funipendula duo corpora in Cycloidibus inæqualibus & earum semiarcubus æquales capiantur rectæ *GH*, *gh*, centrisq; *G*, *g* & intervallis *GH*, *gh* describantur semicirculi *HZKM*, *hzkm*. In eorum diametris *HM*, *hm* capiantur lineolæ æquales *HY*, *hy*, & erigantur normaliter *YZ*, *yz* circumferentiis occurrentes in *Z* & *z*. Quoniam corpora pendula sub initio motus versantur in circumferentia globi *QOS*, adeoq; a viribus æqualibus urgentur in centrum, incipiuntq; directe versus centrum moveri, spatia simul consecta æqualia erunt sub initio. Urgeantur igitur corpora *H*, *h* a viribus iisdem in *H* & *h*, sintq; *HY*, *hy* spatia æqualia ipso motus initio descripta, & arcus *HZ*, *hz* denotabunt æqualia tempora. Horum arcuum nascentium ratio prima duplicata est eadem quæ rectangulorum *GHY*, *ghy*, id est, eadem quæ linearum *GH*, *gh* adeoq; arcus capti in dimidiata ratione semidiametrorum denotant æqualia tempora. Est ergo tempus totum in circulo *HKM*, Oscillationi in una Cycloide respondens, ad tempus totum in circulo *hkm* Oscillationi in altera Cycloide respondens, ut semiperiferia *HKM* ad medium proportionale inter hanc semiperiferiam & semiperiferiam circuli alterius *hkm*, id est in dimidiata ratione diametri *HM* ad diametrum *hm*, hoc est in dimidiata ratione perimetri Cycloidis primæ ad perimetrum Cycloidis

alterius, adeoq; tempus illud in Cycloide quavis est (per Corol. 3. Prop. XLIX.) ut latus quadratum rectanguli *BEC* contenti sub semidiametro Rotæ, qua Cyclois descripta fuit, & differentia inter semidiametrum illam & semidiametrum globi. Q. E. I. Est & idem tempus (per Corol. Prop. L.) in dimidiata ratione longitudinis fili *AR*. Q. E. I.

Porro si in globis concentricis describantur similes Cycloides: quoniam earum perimetri sunt ut semidiametri globorum & vires in analogis perimetrorum locis sunt ut distantiæ locorum a communi globorum centro, hoc est ut globorum semidiametri, atq; adeo ut Cycloidum perimetri & perimetrorum partes similes, æqualia erunt tempora quibus perimetrorum partes similes Oscillationibus similibus describuntur, & propterea Oscillationes omnes erunt Isochronæ. Cum igitur Oscillationum tempora in Globo dato sint in dimidiata ratione longitudinis *AR*, atq; adeo (ob datam *AC*) in dimidiata ratione numeri $AR \div AC$, id est in ratione integra numeri $\sqrt{AR \div AC}$; & hic numerus $\sqrt{AR \div AC}$ servata ratione *AR* ad *AC* (ut fit in Cycloidibus similibus) idem semper maneat, & propterea in globis diversis, ubi Cycloides sunt similes, sit ut tempus: manifestum est quod Oscillationum tempora in alio quovis globo dato, atq; adeo in globis omnibus concentricis sunt ut numerus $\sqrt{AR \div AC}$, id est, in ratione composita ex dimidiata ratione longitudinis fili *AR* directe & dimidiata ratione semidiametri globi *AC* inverse. Q. E. I.

Deniq; si vires absolutæ diversorum globorum ponantur inæquales, accelerationes temporibus æqualibus factæ, erunt ut vires. Unde si tempora capiantur in dimidiata ratione virium inverse, velocitates erunt in eadem dimidiata ratione directe, & propterea spatia erunt æqualia quæ his temporibus describuntur. Ergo Oscillationes in globis & Cycloidibus omnibus, quibuscunq; cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex dimidiata ratione longitudinis Penduli directe, & dimidiata ratione distantiæ inter centrum Penduli & centrum globi inverse, & dimidiata ratione vis absolutæ etiam inverse, id est, si vis illa dicatur *V*, in ratione numeri $\sqrt{AR \div \{AC \times V\}}$. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet linea recta per centrum globi

transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Trochoide quavis *APS* ut $\frac{1}{2}BC$ ad $\sqrt{BEC}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *D. C. Wrennus* & *D. C. Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies Sphærica in planum, visq; centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu, longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *D. C. Wrennus*: Et pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terra suspensa, in Cycloidibus intra globos Oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

Prop. LIII. Prob. XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis Oscillationes semper Isochronas peragent.

Figure for Prop. LIII.

Oscilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis sit *OR* transiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in

corporis loco quovis *T* contingat, inq; hac Tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex figurarum Quadraturis per Methodos vulgares innotescit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* Tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. Q. E. I.

Nam si vis, qua corpus trahitur de *T* versus *C*, exponatur per rectam *TZ* captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires *TY*, *YZ*; quarum *YZ* trahendo corpus secundum longitudinem fili *PT*, motum ejus nil mutat, vis autem altera *TY* motum ejus in curva *STRQ* directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda *TR*, accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus *T* filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, describat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus sinum *TN*: æqualia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, similia erunt triangula *ANT*, *TYZ*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*, vis *TZ*, qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipsi *TY* æqualis ad arcus illius sinum *TN*.

Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu *TR* & radio *AR*, ad sinum *TN*, Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

Prop. LIV. Prob. XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscunq; curvis in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Figure for

Prop. LIV.

Descendat enim corpus de loco quovis *S* per lineam quamvis curvam *STtR* in plano per virium centrum *C* transeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitq; *Dd* partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *CD*, *Cd* describantur circuli *DT*, *dt,* Lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *CT*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus describit lineolam *Tt*, est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli *tTC*) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area *DNnd*, eidem tempori proportionale. Ergo si *SNn* sit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area *SNDS* proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam *ST*; proindeq; ex inventa illa area dabitur tempus. Q. E. I.

Prop. LV. Theor. XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunq; curva, cujus axis per centrum virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eiq; parallela & æqualis ab axis puncto quovis ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Figure for Prop. LV.

Sit *BSKL* superficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *STtR* Trajectoria quam corpus in eadem describit, *S* initium Trajectoriæ, *OMNK* axis superficiei curvæ, *TN* recta a corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *AP* vestigium Trajectoriæ a puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* descriptum, *A* vestigii initium puncto *S* respondens, *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum *C* proportionalis; *TM* recta ad superficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi pressionis qua corpus urget superficiem, vicissimq; urgetur versus *M* a superficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ a

punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoq; motus ejus quatenus secundum positionem plani factus, hoc est motus puncti *P*, quo Trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur, hoc est idem ac si corpus in plano *AOP* vi centripeta ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describetur area *AOP* (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. E. D.

Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunq; curvam *ST*, foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

Prop. LVI. Prob. XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum Quadraturis, datisq; tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum velocitate versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat corpus de loco *S* in Trajectoriam inveniendam *STtR* & ex data ejus velocitate in altitudine *SC* dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *TC*. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam *Tt*, sitq; *Pp* vestigium ejus plano *AOP* descriptum. Jungatur *Op*, & circelli centro *T* intervallo *Tt* in superficie curva descripti sit *PpQ* vestigium Ellipticum in eodem plano *OAPp* descriptum. Et ob datum magnitudine & positione circellum, dabitur Ellipsis illa *PpQ*. Cumq; area *POp* sit tempori proportionalis, atq; adeo ex dato tempore detur, dabitur *Op* positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio *p*, una cum angulo *OPp*, in quo Trajectoriæ vestigium *APp* secat lineam *OP*. Inde autem invenietur Trajectoriæ vestigium illud *APp*, eadem

methodo qua curva linea *VIKk* in Propositione XLI. ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigii punctis *P* erigendo ad planum *AOP* perpendicula *PT* superficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur singula Trajectoriæ puncta *T*. Q. E. I.

SECT. XI.

De Motu Corporum Sphæricorum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neq; attrahens possit quiescere neq; attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legum Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea missis disputationibus Physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

Prop. LVII. Theor. XX.

Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, figuras similes.

Sunt enim distantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atq; adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ quæ his distantiis circumactis describuntur. Q. E. D.

Prop. LVIII. Theor. XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deq; *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, describit, erit similis & æqualis curvis quas corpora *S*, *P* describunt circum se mutuo: proindeq; (per Theor. XX.) similis curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum *C*: id adeo quia proportiones linearum *SC*, *CP* & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Figure for Prop. LVIII.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per Legum Corollarium quartum, vel quiescit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quiescit, inq; *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* similia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* Curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob similitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq*, erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, adeoq; in data ratione. Proinde si vis qua Corpus *P* versus Corpus *S*, atq; adeo versus centrum intermedium *C* attrahitur, esset ad vim qua corpus *p* versus centrum *s* attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq*, per intervalla ipsis proportionalia *RQ*, *rq*; adeoq; vis posterior efficeret ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ similis esset curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit ut corpus *P* gyretur, & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem distantiarum *SP*, *sp*) sibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de Tangentibus; & propterea ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idq; in dimidiata ratione intervallorum; propterea quod, per Lemma decimum, spatia ipso motus initio descripta sunt in

duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* esse ad velocitatem corporis *P* in dimidiata ratione distantiæ *sp* ad distantiam *CP*, eo ut temporibus quæ sint in eadem dimidiata ratione describantur arcus *PQ*, *pq*, qui sunt in ratione integra: Et corpora *P*, *p* viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia *C* & *s* figuras similes *PQV*, *pqv*, quarum posterior *pqv* similis est & æqualis figuræ quam corpus *P* circum corpus mobile *S* describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, adeoq; corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ *pqv* similes & æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. X.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo sectiones conicas umbilicos habentes in centro circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

Prop. LIX. Theor. XXII.

Corporum duorum S & P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis & figuris quæ corpora circum se mutuo describunt figuram similem & æqualem describentis, in dimidiata ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S + P.

Namq; ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes *PQ* & *pq* describuntur, sunt in dimidiata ratione distantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc est, in dimidiata ratione corporis *S* ad summam corporum $S + P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes *PQ* & *pq* describuntur, hoc est tempora tota quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem dimidiata ratione. Q. E. D.

Prop. LX. Theor. XXIII.

Si corpora duo S & P*, viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, Axis transversus erit ad axem transversum Ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica, per Theorema superius, forent in dimidiata ratione corporis *S* ad summam corporum $S + P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia, Ellipseos autem axis transversus per Theorema VII. minuetur in ratione cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio *S* ad $S + P$ est triplicata; adeoq; ad axem transversum Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S + P$ & *S* ad $S + P$. Et inverse, axis transversus Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem transversum descriptæ circa immobile, ut $S + P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S + P$ & *S*. Q. E. D.

Prop. LXI. Theor. XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neq; alias agitata vel impedita, quomodocunq; moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumq; a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus

iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atq; respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium, adeoq; eædem sunt ac si a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam data est ratio distantiæ corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis ejusdem a corpore altero, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitatibus datis utcunq; derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia & quantitatibus totidem datis datamq; illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel deniq; ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitatibus datis quomodocunq; derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel deniq; ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitatibus datis similiter derivata. Hoc est Vis trahentis eadem erit Lex respectu distantiæ utriusq;. Q. E. D.

Prop. LXII. Prob. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora, per Theorema novissimum, perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet (per Hypothesin) & propterea (per Legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus Corporum (per Probl. XXV.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. Q. E. I.

Prop. LXIII. Prob. XXXIX.

Corporum duorum quœ viribus quadrato distantiœ suœ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deq; locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per Legum Corollarium quintum & Theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili de loco dato, secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili.   Q. E. I.

Prop. LXIV. Prob. XL.

Viribus quibus Corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centris: requiruntur motus plurium Corporum inter se.

Ponantur imprimis corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Describent hæc per Corollarium primum Theorematis XXI. Ellipses centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex Problemate V. innotescit.

Figure for Prop. LXIV.

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST* per Legum Corol. 2. resolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*,

DL, quæ sunt ut ipsarum summa *TL*, atq; adeo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; adeoq; (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 7. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus *SD* × *T* & *SD* × *L*, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas *TI*, *LK*, ipsi *DS* parallelas, nil mutant situs earum ad invicem, sed faciunt ipsa æqualiter accedere ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam *IK* accessus faciendo ut Systema corporum *T* & *L* ex una parte, & corpus *S* ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. Tali motu corpus *S* (eo quod summa virium motricium *SD* × *T* & *SD* × *L*, distantiæ *CS* proportionalium, trahitur versus centrum *C*) describit Ellipsin circa idem *C*; & punctum *D* ob proportionales *CS*, *CD* describet Ellipsin consimilem, e regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus *SD* × *T* & *SD* × *L*, (prius priore, posterius posteriore) æqualiter & secundum lineas parallelas *TI* & *LK* (ut dictum est) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile *D* Ellipses suas describere, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum *V*, & simili argumento concludetur hoc & punctum *C* Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis *B* describere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita se habent ubi corpora *T* & *L* trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili describunt. Q. E. I.

Prop. LXV. Theor. XXV.

Corpora plura quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in

Ellipsibus, & radiis ad umbilicos ductis Areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus, neq; fieri potest ut corpora secundum legem hic positam se mutuo trahentia moveantur in Ellipsibus accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantq; ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum.) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absq; errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsibus, atq; radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usq; donec error iste & actiones mutuæ sint datis quibusvis minores, atq; adeo donec orbes cum Ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, absq; errore qui non sit minor quovis dato. Q. E. O.

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur efficiunt: manifestum est quod ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se

reciproce ut quadrata distantiarum, & augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum minores sint differentiæ & inclinationes ad invicem quam datæ quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absq; erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur, movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum, Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsim fortiore,) & Radio ad maximum ducto, verret areas temporibus proportionales, absq; ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ (perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. Q. E. O.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se, propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorq; proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorq; sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsibus vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur, manifestum est, quod eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter & secundum lineas parallelas quamproxime.

Prop. LXVI. Theor. XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum in plano communi revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam Ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione Corollarii secundi Propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Figure for Prop. LXVI.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *Q* in eodem plano circa maximum *S*, quorum *P* describat orbem interiorem *PAB*, & *Q* exteriorem *QE*. Sit *QK* mediocris distantia corporum *P* & *Q*; & corporis *P* versus *Q* attractio acceleratrix in mediocri illa distantia exponatur per eandem. In duplicata ratione *QK* ad *QP* capiatur *QL* ad *QK*, & erit *QL* attractio acceleratrix corporis *P* versus *Q* in distantia quavis *QP*. Junge *PS*, eiq; parallelam age *LM* occurrentem *QS* in *M*, & attractio *QL* resolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones *QM*, *LM*. Et sic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici: una tendente ad *S* & oriunda a mutua attractione corporum *S* & *P*. Hac vi sola corpus *P*, circum corpus *S* sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio *PS* temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis *S*. Patet hoc per Prob. VI. & Corollaria Theor. XXI. Vis altera est attractionis *LM*, quæ quoniam tendit a *P* ad *S*, superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non est quadrato distantiæ *PS* reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idq; eo magis quo major est proportio hujus vis ad vim

priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Corol. 1. Prob. VIII. & Corol. 2. Theor. XXI.) vis qua Ellipsis circa umbilicum S describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ *PS* reciproce proportionalis; vis illa composita aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis *PAB* aberret a forma Ellipseos umbilicum habentis in *S*; idq; eo magis quo major est aberratio ab hac proportione; atq; adeo etiam quo major est proportio vis secundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *QM*, trahendo corpus *P* secundum lineam ipsi *QS* parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a *P* in *S*, quæq; ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atq; adeo quæ faciet ut corpus *P*, radio *SP*, areas non amplius temporibus proportionales describet, atq; aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigitur a *P* ad *S*, tum etiam quod non sit proportionalis quadrato distantiæ *PS*. Quibus intellectis, manifestum est quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis *S* attractio acceleratrix versus *Q* per lineam *QN*; & si attractiones acceleratrices *QM*, *QN* æquales essent, hæ trahendo corpora *S* & *P* æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (par Legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio *QN* minor esset attractione *QM*, tolleret ipsa attractionis *QM* partem *QN*, & maneret pars sola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio *QN* major esset attractione *QM*, oriretur ex differentia sola *MN* perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem *QN* reducitur semper attractio tertia superior *QM* ad attractionem *MN*, attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita *PAB* ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est ubi corporum *P* & *S* attractiones

acceleratrices, factæ versus corpus *Q*, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est ubi attractio *QN* non est nulla, neq; minor minima attractionum omnium *QM*, sed inter attractionum omnium *QM* maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neq; multo minor attractione *QK*. Q. E. D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *Q* circa maximum *S* in planis diversis, & vis *LM*, agendo secundum lineam *PS* in plano Orbitæ *PAB* sitam, eundem habebit effectum ac prius, neq; corpus *P* de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo secundum lineam quæ ipsi *QS* parallela est, (atq; adeo, quando corpus *Q* versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ *PAB*;) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio in dato quovis corporum *P* & *S* ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, adeoq; minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *QN* non est multo major neq; multo minor attractione *QK*. Q. E. D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod si corpora plura minora *P*, *Q*, *R* &c. revolvantur circa maximum *S*: motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *S* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atq; cæteri a se mutuo.

Corol. 2. In Systemate vero trium corporum *S*, *P*, *Q*; si attractiones acceleratrices binorum quorumcunq; in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum, corpus *P* radio *PS* aream circa corpus *S* velocius describet prope conjunctionem *A* & oppositionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namq; vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *S* non urgetur, quæq; non agit secundum lineam *PS*, accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in antecedentia vel in consequentia dirigitur. Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in antecedentia, motumq; accelerat; dein usq; ad *D* in consequentia, & motum retardat; tum in antecedentia usq; ad *B*, & ultimo in consequentia transeundo a *B* ad *C*.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P* cæteris paribus curvior est in quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *S* trahit corpus *P*, adeoq; vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *S*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *S* in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit, Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi Apsides sunt in Syzygiis; indeq; fieri potest ut corpus *P*, ad Apsidem summam appellans, absit longius a corpore *S* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *S*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur, est autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione composita ex ratione simplici radii *SP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*, adeoq; tempus periodicum, si maneat Orbis radius *SP*, augeri, idq; in dimidiata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoq; adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione sesquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus *P* minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *S*; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui *Q*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices, augebitur simul ac diminuetur Radius *SP* per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione sesquiplicata Radii & ratione dimidiata qua vis illa centripeta corporis centralis *S* per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *Q* diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam quod Ellipseos a corpore *P* descriptæ axis seu Apsidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* in

Quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta qua corpus *S* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, si augeatur distantia *PS*, augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoq; summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantiæ *PS*, & propterea, per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem seu Apsidem summam regredi. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus *P* urgetur in corpus *S* differentia est inter vim qua corpus *S* trahit corpus *P* & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione distantiæ *PS*, decrescit in majore quam duplicata ratione distantiæ *PS*, adeoq; per Corol. 1. Prop. XLV. facit Augem progredi. In locis inter Syzygias & Quadraturas, pendet motus Augis ex causa utraq; conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in Syzygiis sit quasi duplo major quam vis *LM* in quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim *KL*, transferetq; Augem singulis revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum *S*, *P* corporibus pluribus *Q*, *Q*, *Q* &c. in Orbe *QE* consistentibus, undiq; cingi. Namq; horum actionibus actio ipsius *S* minuetur undiq;, decrescetq; in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ *SP*, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atq; adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam *KL* seu *NM* - *LM*, progredientur velocius, inq; Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: Manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret

in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoq; Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoq; si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum *S*, *P*, *Q*, ubi Apsides orbis *PAB* sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi Apsides sunt in Syzygiis. Si Apsides constituantur in quadraturis ratio prope Apsides minor est, & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in minore quam duplicata ratione distantiæ Apsidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apsidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apsides constituuntur in Syzygiis, vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires *LM* in Quadraturis additæ viribus corporis *S* componunt vires in ratione minore, & vires *KL* in Syzygiis subductæ viribus corporis *S* relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter Apsides, minima in quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apsidum a quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetq; Excentricitatem Ellipseos; inq; transitu a Syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum Orbis *QES* immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ sunt causa illa tota, vis *ML* agendo semper secundum planum Orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem, quodq; vis *NM* ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusq; *P* de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani

in transitu corporis a quadraturis ad Syzygias, augetq; vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatq; ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post quadraturas, id est inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expositis quod, in transitu corporis *P* a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usq; ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usq; ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaq; diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. Et simili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur, ubi nodi sunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsibus, diminuitur, fitq; omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis & corpus in Syzygiis: dein crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat, Nodisq; ad Syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi nodi sunt in quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, idq; in partem versus *Q*, in transitu suo a nodo *C* per Conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in transitu a nodo *D* per Oppositionem *B* ad nodum *C*; manifestum est quod in motu suo a nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo *CD*, usq; dum perventum est ad nodum proximum; adeoq; in hoc nodo, longissime distans a plano illo primo *CD*, transit per planum Orbis *QES*, non in plani illius Nodo altero *D*, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *Q*, quodq; proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent Nodi recedere in transitu Corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuo recedunt, in Syzygiis (ubi motus in latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis intermediis conditionis utriusq; participes recedunt tardius, adeoq; semper vel retrogradi vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti errores sunt paulo majores in conjunctione Corporum *P*, *Q* quam in eorum Oppositione, idq; ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumq; rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *Q*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *Q* tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *S* & *P* Systema. Et ex aucto corpore *Q*, auctaq; adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus distantiis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *Q* circum Systema corporum *P* & *S* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *Q* longinquum est, sint quamproxime ut vis *QK* & ratio *PS* ad *QS* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PS*, tum corporis *Q* vis absoluta, ut *QS cub.* reciproce; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcedentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante corporum *S* & *P* Systemate, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis *Q* & ratione triplicata inversa distantiæ *QS*. Unde si Systema corporum *S* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *Q*, vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde si magnitudo corporis *Q* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *Q* e corpore *S* spectati, & vice versa. Namq; hæ rationes eædem sunt atq; ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium *QE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum *Q* & *S* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est vis corporis *S*, qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *Q*, qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunq; corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML* cæteris stantibus sunt ut Radius *SP*, & harum

effectus periodici (per Corol. 2, Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *S* spectati (id est tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14. & in quolibet corporum *S*, *P*, *Q* Systemate, ubi *P* circum *S* sibi propinquum, & *S* circum *Q* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *S* apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverse. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterq; erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *S* inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis *PAB* non mutantur motus Augis & Nodorum sensibiliter, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major si nunc minor quam radius *PS*, Exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PS*, & erit hæc ad vim mediocrem *QK* vel *QN* (quam exponere licet per *QS*) ut longitudo *PS* ad longitudinem *QS*. Est autem vis mediocris *QN* vel *QS*, qua corpus retinetur in orbe suo circum *Q*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S*, in ratione composita ex ratione radii *QS* ad radium *PS*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *S* ad tempus periodicum corporis *S* circum *Q*. Et ex æquo, vis mediocris *LM*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *S* (quave corpus idem *P* eodem tempore periodico circum punctum quodvis immobile *S* ad distantiam *PS* revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia *PS*, datur vis mediocris *LM*; & ea data datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PS*, *MN*.

Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus *P* circum corpus *S* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *S* ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *S* concentricum; & singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *S*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis *Q*, quam in Quadraturis. Et Nodi annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *Q* vel

S, quiescent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoq; inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaq; revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *S* ex materia non fluida constantem ampliari & extendi usq; ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuq; eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Lemmate) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetq; ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio *Q*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5) ut & Globi de cursa rectilineo uniformiter tracti (per Legum Corol. 6.) Accedat autem corpus *Q*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietq; ipsam descendere usq; ad Syzygias; & vis *KL* trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetq; descensum ejus & faciet ipsam ascendere usq; ad Quadraturas.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & refluendi; sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo, gyrosq; compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eiq; inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusq; Oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usq; dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatq; motum novum in contrariam partem: Atq; hac ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus post Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis & maximus angulus in Octantibus

proximis. Et eadem est ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunq; Globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atq; adeo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si Globus juxta æquatorem vel depressior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim ex motu Nodorum innotescit constitutio Globi. Nimirum si Globus polos eosdem constanter servat & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunq; oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neq; propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est quod is axem suum axisq; inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa superficiei parte qua prius, impulsu quocunq; novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulsus successive impressi eundem producent motum ac si simul impressi fuissent, hoc est eundem ac si Globus vi simplici ex utroq; (per Legum Corol. 2.) composita impulsus fuisset, atq; adeo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absq; primo generaret; atq; adeo impulsuum amborum factorum in loca quæcunq;: Generabunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum

inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunq; per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte dividi intelligatur in duo hemisphæria, urgebit semper vis illa utrumq; hemisphærium æqualiter, & propterea Globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietq; polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumq; sibi oppositum perpetuo describere. Neq; corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Casu, per Corol. 21, Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione, per Corol. 20, Nodi regredientur; vel deniq; ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur: & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

Prop. LXVII. Theor. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q*, circa interiorum* P*, S commune Gravitatis centrum* C*, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* S*, radiis ad ipsum ductis, describere potest.*

Nam corporis *Q* attractiones versus *S* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *S* & *P* commune gravitatis centrum *C*, quam in corpus maximum *S*, quæq; quadrato distantiæ *QC* magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ *QS*: ut rem perpendenti facile constabit.

Prop. LXVIII. Theor. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius Q *circa interiorum* P & S *commune gravitatis centrum* C*, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in*

centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atq; cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.

Figure for Prop. LXVIII.

Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus *Q* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis illorum duorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *Q* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *Q* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit, hoc est ubi corpus intimum & maximum *S* lege cæterorum attrahitur: fitq; major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *S*, moveri incipit & magis deinceps magisq; agitatur.

Corol. Et hinc si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentq;, & Orbitæ cujusq; umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum Omnium.

Prop. LXIX. Theor. XXIX.

In Systemate corporum plurium A, B, C, D *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D *&c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B, C, D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi, & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A, B, C, D,* &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sint reciproce ut Quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A, B, C, D* &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunq; distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunq; communem ex distantiis ab unoquoq; trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis

describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunq; accedendi ad invicem; sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris aut Aeris mediive cujuscunq; seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunq; impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens; ut in Definitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunq; positis consequentur: deinde ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

SECT. XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

Prop. LXX. Theor. XXX.

Figure for Prop. LXX.

Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* superficies illa Sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; & ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales, & superficiei Sphæricæ particulæ quævis, ad *HI* & *KL* rectis per punctum *P* transeuntibus undiq; terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se aquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur in contrarias partes æqualiter factæ se mutuo destruunt. Et simili argumento attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. E. D.

Prop. LXXI. Theor. XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Figures for Prop. LXXI.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies Sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* descriptæ, & *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus quam minimos *HK*, *hk* & *HL*, *hl*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in *F* & *f*. Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*; & ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, & angulos evanescentes *DPE* & *dpe*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineolæ *DF*, *df* pro æqualibus habeantur: quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaq; constitutis, erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *DF* vel *df* ad *ri*; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc est (per Corol. 3. Lem. VII.) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. Rursus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *ps* ad *pi* ut *SE* vel *se* ad *iq*; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus *PI quad.* $\times\ pf \times ps$ ad *pi quad.* $\times\ PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus *IH* convolutione semicirculi *AKB* circa diametrum *AB* describet, ad superficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione semicirculi *akb* circa diametrum *ab* describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula *P* & *p*, sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntq; hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2 resolutione virium) secundum lineas *PS*, *ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, & *pi* ad *pq*; id est (ob similia triangula *PIQ* & *PSF*, *piq* & *psf*) ut *PS* ad *PF* & *ps* ad *pf*. Unde ex æquo fit attractio corpusculi hujus *P* versus *S* ad attractionem corpusculi *p* versus *s*, ut $PF \times pf \times ps \div PS$ ad $pf \times PF \times PS \div ps$, hoc es ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum *KL*, *kl* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.*; inq; eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraq; superficies Sphærica, capiendo semper $sd = SD$ & $se = SE$, distingui potest. Et per Compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Prop. LXXII. Theor. XXXII.

Si ad Spheræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a

punctis, ac detur ratio diametri Spheræ ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semi-diametro Sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, & distantias a centris proportionales esse diametris, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Hinc attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum inverse. Sed particulæ sunt ut Sphæræ, hoc est in ratione triplicata diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes revolvantur, sintq; distantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris; tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Theor. IV.

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII.

Figure for Prop. LXXIII.

Si ad sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.

In Sphæra *ABCD,* centro *S* descripta, locetur corpusculum *P*, & centro eodem *S* intervallo *SP* concipe Sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, per Theor. XXX. quod Sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in

corpus *P*. Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Theor. XXXII, hæc est ut distantia *PS*. Q. E. D.

Scholium.

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbes adeo tenues ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum, juxta Methodum sub initio in Lemmatis generalibus expositam. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV.

> *Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.*

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro, per Theor. XXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio Sphæræ totius, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ. Nam per Theor. XXXII. si distantiæ sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione, & distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoq; erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum extra Sphæram homogeneam positum trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis

particulæ cujusq; in duplicata ratione distantiæ a particula.

Prop. LXXV. Theor. XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, dico quod Sphæra quævis alia similaris attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ ejus a centro Sphæræ trahentis, (per Theor. XXXI,) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Theor. XXXIV) reciproce proportionalis quadrato distantiæ ejus a centro Sphæræ; adeoq; huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namq; hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoq; cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

Prop. LXXVI. Theor. XXXVI.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quod

materiæ densitatem & vim attractivam) utcunq; dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undiq; similares, & vis attractiva puncti cujusq; decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Figure for Prop. LXXVI.

Sunto Sphæræ quotcunq; concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF* &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ, per Theor. XXXV, trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas similares *GH*, *IK*, *LM*, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuscunq; vel concentricarum differentiis composita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuscunq; vel concentricarum differentiis compositam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum Legem quamcunq; crescat vel decrescat: & addita materia non attractiva compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum superius) in eadem illa distantiæ quadratæ ratione inversa. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si ejusmodi Sphæræ complures sibi invicem per omnia similes se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt in æqualibus quibusvis centrorum distantiis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; distantiis quibusvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris

per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inq; distantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusq; virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintq; distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

Prop. LXXVII. Theor. XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.

Figure for Prop. LXXVII.

Cas. 1. Sit *ACBD* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpusculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, *EF*, *ef* plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; *Gg* intersectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P* secundum lineam *PH* exercita est ut distantia *PH*, & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam *PG*, seu versus centrum *S*, ut

longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc est plani totius vis, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut numerus punctorum ductus in distantiam *PG*: id est ut contentum sub plano ipso *EF* & distantia illa *PG*. Et similiter vis plani *ef*, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut planum illud ductum in distantiam suam *Pg*; sive ut huic æquale planum *EF* ductum in distantiam illam *Pg*; & summa virium plani utriusq; ut planum *EF* ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam *PS*, hoc est, ut duplum planum *EF* ductum in distantiam *PS*, vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam *PS*, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui *S* a corpusculo *P*. Q. E. D.

Cas. 2. Trahat jam corpusculum *P* Sphæram *ACBD*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia *PS*. Q. E. D.

Cas. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodq; trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atq; adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. Q. E. D.

Cas. 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum *p* intra Sphæram *ACBD*, & quoniam vis plani *ef* in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia *pg*; & vis contraria plani *EF* ut contentum sub plano illo & distantia *pG*; erit vis ex utraq; composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in *pS*, distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento attractio planorum omnium *EF*, *ef* in Sphæra tota, hoc est attractio Sphæræ totius, est ut summa

planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in *pS* distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Q. E. D.

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris *p* componatur Sphæra nova intra Sphæram priorem *ACBD* sita, probabitur ut prius, quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusq; in se invicem, erit ut distantia centrorum *pS*. Q. E. D.

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII.

> *Si Sphœrœ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunq; dissimilares & inœquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undiq; similares; & vis attractiva puncti cujusq; sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphœrœ duœ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiœ inter centra Sphœrarum.*

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo Propositio LXXVII. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum, conditionis jam descriptæ, suntq; corpora attracta Sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroq; Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum vires centripetas eadem lege in recessu a centro decrescentes vel crescentes cum seipsis. Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset: Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

Lemma XXIX.

> *Si describantur centro* S *circulus quilibet* AEB*,* (Vide Fig. Prop. sequentis) *& centro* P *circuli duo* EF*,* ef*, secantes priorem in* E*,* e*, lineamq;* PS *in* F*,* f*; & ad* PS *demittantur perpendicula* ED*,* ed*: dico quod si distantia arcuum* EF*,* ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS*.*

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob similia triangula *EDT*, *edt*, *EDS*; erit *Dd* ad *Ee*, ut *DT* ad *ET* seu *DE* ad *ES*, & ob triangula *Eqe*, *ESG* (per Lem. VIII. & Corol. 3. Lem. VII.) similia, erit *Ee* ad *qe* seu *Ff*, ut *ES* ad *SG*, & ex æquo *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. Q. E. D.

Prop. LXXIX. Theor. XXXIX.

> *Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens* EFfe*, convolutione sui circa axem* PS*, describat solidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P*, est in ratione composita ex ratione solidi* DEq. $\times$ Ff *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*

Figure for Prop. LXXIX.

Nam si primo consideremus vim superficiei Sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & linea *de* ubivis secatur in *r*; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente Sphæræ radio *PE*, (uti demonstravit *Archimedes* in Lib. de Sphæra & Cylindro.) Et hujus vis secundum lineas *PE* vel *Pr* undiq; in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola *Dd*, vel quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at secundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor, in ratione *PD* ad *PE*, adeoq; ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea *DF* in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur *Dd*; & superficies *FE* dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, cum lineolæ omnes *Dd* sibi invicem æquentur, adeoq; pro datis haberi possint, ut summa omnium *PD* ducta in *Dd*, id est, ut ½*PFq*. - ½*PDq*. sive ½*PEq*. - ½*PDq*. vel ½*DEq*. ductum in *Dd*; hoc est, si negligatur data ½*Dd*, ut *DE quad.* Ducatur jam superficies *FE* in altitudinem *Ff*; & fiet solidi *EFfe* vis exercita in corpusculum *P* ut $DEq. \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data *Ff* in distantia *PF* exercet in corpusculum *P*. At si vis illa non detur, fiet vis solidi *EFfe* ut solidum $DEq. \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. Q. E. D.

Prop. LXXX. Theor. XL.

Si ad Sphæræ alicujus AEB*, centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB*, in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* DE*, Sphæræ occurrentia in* E*, & in ipsis capiantur longitudines* DN*, quæ sint ut quantitas* $DEq. \times PS \div PE$ *& vis quam Sphæræ particula sita in axe ad distantiam* PE *exercet in corpusculum* P *conjunctim: dico quod vis tota, qua corpusculum* P *trahitur versus Sphæram, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB*, quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ *AB* dividi in particulas

innumeras æquales *Dd*, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas *EFfe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per Theorema superius, vis qua lamina *EFfe* trahit corpusculum *P* est ut *DEq.* × *Ff* & vis particulæ unius ad distantiam *PE* vel *PF* exercita conjunctim. Est autem per Lemma novissimum, *Dd* ad *Ff* ut *PE* ad *PS*, & inde *Ff* æqualis *PS* × *Dd* ÷ *PE*; & *DEq.* × *Ff* æquale *Dd* in *DEq.* × *PS* ÷ *PE*, & propterea vis laminæ *EFfe* est ut *Dd* in *DEq.* × *PS* ÷ *PE* & vis particulæ ad distantiam *PF* exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut *DN* × *Dd*, seu area evanescens *DNnd*. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus *P* exercitæ, ut areæ omnes *DNnd*, hoc est Sphæræ vis tota ut area tota *ABNA*.   Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat *DN* ut *DEq.* × *PS* ÷ *PE*: erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area *ABNA*.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat *DN* ut *DEq.* × *PS* ÷ *PEq.*: erit vis qua corpusculum *P* a Sphæra tota attrahitur ut area *ABNA*.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiæ corpusculi a se attracti, & fiat *DN* ut *DEq.* × *PS* ÷ *PEqq.*: erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area *ABNA*.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas *V*, fiat autem *DN* ut {*DEq.* × *PS*} ÷ {*PE* × *V*}; erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attrahitur ut area *ABNA*.

Prop. LXXXI. Prob. XLI.

Figure for Prop. LXXIX.

Stantibus jam positis, mensuranda est Area ABNA.

A puncto *P* ducatur recta *PH* Sphæram tangens in *H*, & ad axem *PAB* demissa Normali *HI*, bisecetur *PI* in *L*; & erit (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) *PEq.* æquale *PSq.* + *SEq.* + 2*PSD*. Est autem *SEq.* seu *SHq.* (ob similitudinem triangulorum *SPH*, *SHI*) æquale rectangulo *PSI*. Ergo *PEq.* æquale est contento sub *PS* & *PS* + *SI* + 2*SD*, hoc est, sub *PS* & 2*LS* + 2*SD*, id est, sub *PS* & 2*LD*. Porro *DE quad.* æquale est

SEq. - *SDq.* seu *SEq.* - *LSq.* + 2*SLD* - *LDq.* id est, *SLD* - *LDq.* - *ALB*. Nam *LSq.* - *SEq.* seu *LSq.* - *SAq.* (per Prop. 6 Lib. 2. Elem) æquatur rectangulo *ALB*. Scribatur itaq; 2*SLD* - *LDq.* - *ALB* pro *DEq.* & quantitas {*DEq.* × *PS*} ÷ {*PE* × *V*}, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ *DN*, resolvet sese in tres partes

$$\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq. \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V} :$$

Figure for Exempl. 1.

ubi si pro *V* scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro *PE* medium proportionale inter *PS* & 2*LD*; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. Q. E. F.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro *V* scribe distantiam *PE*, dein 2*PS* × *LD* pro *PEq.*, & fiet *DN* ut *SL* - ½*LD* - *ALB* ÷ 2*LD*. Pone *DN* æqualem duplo ejus 2*SL* - *LD* - *ALB* ÷ *LD*: & ordinatæ pars data 2*SL* ducta in longitudinem *AB* describet aream rectangulam 2*SL* × *AB*; & pars indefinita *LD* ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini *LD*, describet aream {*LBq.* - *LAq.*} ÷ 2, id est, aream *SL* × *AB*; quæ subducta de area priore 2*SL* × *AB* relinquit aream *SL* × *AB*. Pars autem tertia *ALB* ÷ *LD* ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area *SL* × *AB* relinquet aream quæsitam *ABNA*. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta *L*, *A*, *B* erige perpendicula *Ll*, *Aa*, *Bb*, quorum *Aa* ipsi *LB*, & *Bb* ipsi *LA* æquetur. Asymptotis *Ll*, *LB*, per puncta *a*, *b* describatur Hyperbola *ab*. Et acta chorda *ba* claudet aream *aba* areæ quæsitæ *ABNA* æqualem.

Figure for Exempl. 2.

Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit

reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $PE\ cub. \div 2ASq.$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro $PEq.$; & fiet DN ut

$$\frac{SL \times ASq.}{PS \times LD} - \frac{ASq.}{2PS} - \frac{ALB \times ASq.}{2PS \times LDq.}$$

id est (ob continue proportionales *PS*, *AS*, *SI*) ut

$$\frac{LSI}{LD} - \tfrac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq.}.$$

Si ducantur hujus partes tres in longitudinem *AB*, prima $LSI \div LD$ generabit aream Hyperbolicam; secunda $\tfrac{1}{2}SI$ aream $\tfrac{1}{2}AB \times SI$; tertia $ALB \times SI \div 2LDq.$ aream

$$\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB},$$

id est $\tfrac{1}{2}AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ ac tertiæ, & manebit area quæsita *ABNA*. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta *L*, *A*, *S*, *B* erige perpendicula *Ll*, *Aa*, *Ss*, *Bb*, quorum *Ss* ipsi *SI* æquetur, perq; punctum *s* Asymptotis *Ll*, *LB* describatur Hyperbola *asb* occurrens perpendiculis *Aa*, *Bb* in *a* & *b*; & rectangulum 2*ASI* subductum de area Hyperbolica *AasbB* relinquet aream quæsitam *ABNA*.

Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicata ratione distantiæ a particulis, scribe $PE^4 \div 2AS^3$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut

$$\frac{SL \times SI^{3/2}}{\sqrt{2} \times LD^{3/2}} - \frac{SI^{3/2}}{2\sqrt{2} \times LD^{1/2}} - \frac{ALB \times SI^{3/2}}{2\sqrt{2} \times LD^{5/2}}.$$

Cujus tres partes ductæ in longitudinem *AB*, producunt Areas totidem, *viz.*

$$\sqrt{2} \times SL \times SI^{3/2} - \sqrt{2} \times SL \times SI^{3/2},\quad LB^{1/2} \times SI^{3/2} - LA^{1/2} - SI^{3/2} \quad \& \quad ALB \times SI^{3/2} - ALB \times SI^{3/2}.$$

$$\begin{array}{ccccc} \hline LA^{1/2} & LB^{1/2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ & & & \times & \times \\ & & & LA^{3/2} & LB^{3/2} \end{array}$$

Et hæ post debitam reductionem, subductis posterioribus de priori, evadunt 8*SI cub.* ÷ 3*LI*. Igitur vis tota, qua corpusculum *P* in Sphæræ centrum trahitur, est ut *SI cub.* ÷ *PI*, id est reciproce ut *PS cub.* × *PI*. Q. E. I.

Eadem Methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra Sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.

Prop. LXXXII. Theor. XLI.

In Sphæra centro S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex dimidiata ratione distantiarum a centro* IS, PS *& dimidiata ratione virium centripetarum, in locis illis* P & I, *ad centrum tendentium.*

Figure for Prop. LXXXII.

Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione composita ex dimidiata ratione distantiæ *SI* ad distantiam *SP* & ratione dimidiata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione dimidiata distantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes dimidiatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *SP* ad Sphæræ semidiametrum *SA*: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem ut *SP quad.* ad *SA quad.*; si in quadruplicata, ut *SP cub.* ad *SA cub.* Unde cum attractio in *P*, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut *PS cub.* × *PI*, attractio in *I* erit reciproce ut *SA cub.* × *PI*, id est (ob datum *SA*

cub.) reciproce ut *PI*. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis *P*, ordinatim applicata *DN* inventa fuit ut $\{DEq. \times PS\} \div \{PE \times V\}$. Ergo si agatur *IE*, ordinata illa ad alium quemvis locum *I*, mutatis mutandis, evadet ut $\{DEq. \times IS\} \div \{IE \times V\}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis *E* manantes, esse ad invicem in distantiis *IE*, *PE*, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus *n* designet indicem potestatum *PE* & *IE*) & ordinatæ illæ fient ut $\{DEq. \times PS\} \div \{PE \times PE^n\}$ & $\{DEq. \times IS\} \div \{IE \times IE^n\}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula *SPE*, *SEI*, fit *IE* ad *PE* ut *IS* ad *SE* vel *SA*; pro ratione *IE* ad *PE* scribe rationem *IS* ad *SA*; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed *PS* ad *SA* dimidiata est ratio distantiarum *PS*, *SI*; & IE^n ad PE^n dimidiata est ratio virium in distantiis *PS*, *IS*. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisq; proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex dimidiatis illis rationibus. Q. E. D.

Prop. LXXXIII. Prob. XLII.

Figure for Prop. LXXXIII.

Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus segmentum quodcunq; attrahitur.

Sit *P* corpus in centro Sphæræ, & *RBSD* segmentum ejus plano *RDS* & superficie Sphærica *RBS* contentum. Superficie Sphærica *EFG* centro *P* descripta secetur *DB* in *F*, ac distinguatur segmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas *O*, & erit hæc superficies (per demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est *n*; & vis qua superficies *FE* trahit corpus *P* erit ut $DF \times O \div PFn^{-1}$. Huic proportionale sit perpendiculum *FN* ductum in *O*; & area curvilinea *BDLIB*, quam ordinatim applicata *FN* in longitudinem *DB* per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua segmentum totum *RBSD* trahit corpus *P*. Q. E. I.

Prop. LXXXIV. Prob. XLIII.

Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphœrœ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento *EBK* trahatur corpus *P* (*Vide Fig. Prop. 79. 80. 81.*) in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* describatur superficies Sphærica *EFK*, qua distinguatur segmentum in partes duas *EBKF* & *EFKD*. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius *EBKD*. Q. E. I.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deq; motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECT. XIII.

De Corporum etiam non Sphæricorum viribus attractivis.

Prop. LXXXV. Theor. XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atq; adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoq; vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusq; Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

Prop. LXXXVI. Theor. XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. E. D.

Prop. LXXXVII. Theor. XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia & ex materia æqualiter attractiva constantia seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. Q. E. D.

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* adeoq; tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut *A cub.* ÷ *A quad.* & *B cub.* ÷ *B quad.* id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut *A cub.* ÷ *A cub.* & *B cub.* ÷ *B*

cub. id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata, attractiones in corpora erunt ut $A\ cub. \div Aqq.$ & $B\ cub. \div Bqq.$ id est, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

Prop. LXXXVIII. Theor. XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuscunq; vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Figure for Prop. LXXXVIII.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ in distantias suas *AZ*, *BZ* respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & secetur ea in *G* ut sit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; & erit *G* commune centrum gravitatis particularum *A* & *B*. Vis $A \times AZ$ per Legum Corol. 2. resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales *A* ad *B* & *BG* ad *AG*, æquantur, adeoq;, cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab *Z* versus centrum *G*, & vim $A + B \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ *A* & *B* consisterent in eorum communi gravitatis centro *G*, globum ibi componentes.

Eodem argumento si adjungatur particula tertia *C*; & componatur hujus vis cum vi $A + B \times GZ$ tendente ad centrum *G*, vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius *G* & particulæ *C*; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium

particularum *A*, *B*, *C*; & eadem erit ac si globus & particula *C* consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunq; *RSTV* ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram globi indueret.   Q. E. D.

Corol. Hinc motus corporis attracti *Z* idem erit ac si corpus attrahens *RSTV* esset Sphæricum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum, corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

Prop. LXXXIX. Theor. XLVI.

Si Corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunq; trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atq; Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoq; si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta, corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

Prop. XC. Prob. XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunq; puncta tendant vires centripetæ decrescentes in quacunq; distantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis in recta quæ ad planum circuli per centrum ejus perpendicularis consistit.

Figure for Prop. XC.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis

est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis qua corpus quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpus attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, & erigatur Normalis *FK*, quæ sit ut vis qua punctum *E* trahit corpusculum *P*. Sitq; *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpusculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. Q. E. I.

Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PA* capiatur *Pf* ipsi *Pe* æqualis. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis *E* trahit ad se corpus *P*, ponitur esse ut *FK*, & inde vis qua punctum illud trahit corpus *P* versus *A* est ut $AP \times FK \div PE$, & vis qua annulus totus trahit corpus *P* versus *A*, ut annulus & $AP \times FK \div PE$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio *AE* & latitudine *Ee*, & hoc rectangulum (ob proportionales *PE* & *AE*, *Ee* & *cE*) æquatur rectangulo $PE \times cE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus *P* versus *A* ut $PE \times Ff$ & $AP \times FK \div PE$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times AP \times FK$, sive ut area *FKkf* ducta in *AP*. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro *A* & intervallo *AD* describitur, trahunt corpus *P* versus *A*, est ut area tota *AHIKL* ducta in *AP*. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit *FK* ut $1 \div PF$ *quad.*, atq; adeo area *AHIKL* ut $\{1 \div PA\} - \{1 \div PH\}$; erit attractio corpusculi *P* in circulum $1 - \{PA \div PH\}$, id est, ut $AH \div PH$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias *D* sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit *FK* ut $1 \div D^n$, adeoq; area *AHIKL* ut $\{1 \div PA^{n-1}\} - \{1 \div PH^{n-1}\}$; erit attractio corpusculi *P* in circulum ut $\{1 \div PA^{n-2}\} - \{PA \div PH^{n-1}\}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus *n* sit unitate major; attractio corpusculi *P* in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $PA \div PH^{n-1}$ evanescet.

Prop. XCI. Prob. XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi, ad cujus puncta singula tendunt vires centripetæ in quacunq; distantiarum ratione decrescentes.

Figure for Prop. XCI.

In solidum *ADEFG* trahatur corpusculum *P*, situm in ejus axe *AB*. Circulo quolibet *RFS* ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus diametro *FS*, in plano aliquo *PALKB* per axem transeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo *FK* vi qua corpusculum *P* in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum *K* curvam lineam *LKI*, planis extimorum circulorum *AL* & *BI* occurrentem in *A* & *B*; & erit attractio corpusculi *P* in solidum ut area *LABI*. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si solidum Cylindrus sit, parallelogrammo *ADEB* circa axem *AB* revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi *P* in hunc Cylindrum ut $BA - PE + PD$. Nam ordinatim applicata *FK* (per Corol. 1. Prop. XC.) erit ut $1 - PF \div PR$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *AB*, describit aream $1 \times AB$; & pars altera $PF \div PR$ ducta in longitudinem *PB*, describit aream 1 in $PE - AD$ (id quod ex curvæ *LKI* quadratura facile ostendi potest:) & similiter pars eadem ducta in longitudinem *PA* describit aream 1 in $PD - AD$, ductaq; in ipsarum *PB*, *PA* differentiam *AB* describit arearum differentiam 1 in $PE - PD$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $PE - PD$, & restabit area *LABI* æqualis 1 in $AB - PE + PD$. Ergo vis huic areæ proportionalis est ut $AB - PE + PD$.

Figure for Corol. 2.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphærois *AGBCD* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. Sit *NKRM* Sectio Conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus *A*, *B* ad

ejus axem *AB* erigantur perpendicula *AK*, *BM* ipsis *AP*, *BP* æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in *K* & *M*; & jungantur *KM* auferens ab eadem segmentum *KMRK*. Sit autem Sphæroidis centrum *S* & semidiameter maxima *SC*: & vis qua Sphærois trahit corpus *P* erit ad vim qua Sphæra, diametro *AB* descripta, trahit idem corpus, ut

$$\frac{AS \times CSq. - PS \times KMRK}{PSq. + CSq. - ASq.} \quad \text{ad} \quad \frac{AS\ cub.}{3PS\ quad.}.$$

Et eodem computando fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.

Figure for Corol. 3.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem in data quavis ejusdem diametro collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit *AGOF* Sphærois attrahens, *S* centrum ejus & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum semidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* Sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*: Sintq; *PCM*, *HLN* superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus *P* & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior secet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* designare Conos oppositos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis descriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo *P*, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinq; æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni *DPF* & segmenti Conici *EGCB*, & per

contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a sola Sphæroide intima *PCBM*, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, qua corpus *A* trahitur a Sphæroide tota *AGOD*, ut distantia *PS* ad distantiam *AS*. Q. E. I.

Prop. XCII. Prob. XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

Prop. XCIII. Theor. XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

Figure for Prop. XCIII.

Cas. 1. Sit *LGl* planum quo Solidum terminatur. Jaceat autem solidum ex parte plani hujus versus *I*, inq; plana innumera *mHM*, *nIN* &c. ipsi *GL* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra solidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus *n* ternario

non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) vis qua planum quodvis *mHM* trahit punctum *C* est reciproce ut CH^{n-2}. In plano *mHM* capiatur longitudo *HM* ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut *HM*. Similiter in planis singulis *lGL*, *nIN*, *oKO* &c. capiantur longitudines *GL*, *IN*, *KO* &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2} &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoq; summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area *GLOK* in infinitum versus *OK* producta. Sed area illa per notas quadraturarum methodos est reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis solidi totius est reciproce ut CG^{n-3} Q. E. D.

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum *C* ex parte plani *lGL* intra solidum, & capiatur distantia *CK* æqualis distantiæ *CG*. Et solidi pars *LGloKO*, planis parallelis *lGL*, *oKO* terminata, corpusculum *C* in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum *C* sola vi solidi ultra planum *OK* siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-3}, hoc est (ob æquales *CG*, *CK*) reciproce ut CG^{n-3}. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si solidum *LGIN* planis duobus infinitis parallelis *LG*, *IN* utrinq; terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva solidi totius infiniti *LGKO* vim attractivam partis ulterioris *NIKO*, in infinitum versus *KO* productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet, propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius

ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXVII.) motum corporis recta descendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur Lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ ea conditione ut corpus attractum in data quacunq; curva linea moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{m \div n}$; & quæratur vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curva linea quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit; Suppono basem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $A + O^{m \div n}$ resolvo in Seriem infinitam

$$A^{m \div n} + \frac{m}{n} OA^{(m - n) \div n} + \frac{mm - mn}{2nn} O^2 A^{(m - 2n) \div n} \ \&c.$$

atq; hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est termino $\{mm - mn\} \div 2nn\ O^2 A^{(m - 2n) \div n}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quæsita ut $\{mm - mn\} \div nn\ A^{(m - 2n) \div n}$, vel quod perinde est, ut $\{mm - mn\} \div nn\ B^{(m - 2n) \div m}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m = 2$, & $n = 1$: fiet vis ut data $2B^0$, adeoq; dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m = 0 - 1$, & $n = 1$; fiet vis ut $2B^3$: adeoq; vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SECT. XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

Prop. XCIV. Theor. XLVIII.

Figure for Prop. XCIV.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinq; terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neq; ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem attractio, in æqualibus ab utroq; plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubiq; eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

Cas. 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* secundam lineam *GH*, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eaq; actione describat lineam curvam *HI*, & emergat secundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in *L*. Centro *L* intervallo *LI* describatur circulus, secans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) curva *HI* Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea *IM* æquale sit *HM* quadrato; sed & linea *HM* bisecabitur in *L*. Unde si ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales erunt *MO*, *OR*; & additis æqualibus *IO*, *ON*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*, estq; rectangulum *NMI* ad rectangulum sub latere recto & *IM*, hoc est, ad *HMq.*, in data ratione. Sed rectangulum *NMI* æquale est rectangulo *PMQ*, id est, differentiæ quadratorum *MLq.* & *PLq.* seu *LIq.*; & *HMq.* datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem *LMq.*: ergo datur ratio *MLq.* - *LIq.* ad *MLq.*, & divisim, ratio

LIq. ad *MLq.*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ *LMR* ad sinum anguli emergentiæ *LIR*. Q. E. D.

Figure for Corol. 2.
and Prop. XCV.

Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC* &c. & agitetur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo *Bb*, in data ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum *Bb*, erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & sic in infinitum: & ex æquo sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuatur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulsus actio secundum legem quamcunq; assignatam continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. Q. E. D.

Prop. XCV. Theor. XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et per Legum Corol. 2. distinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus agendo secundum lineas perpendiculares nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interq; punctum *I* & lineam *dK*; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam est ad

velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id est, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. Q. E. D.

Prop. XCVI. Theor. L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Figure for Prop. XCVI.

Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintq; arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *Dd*, in spatium *DdeE*: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoq; linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus medium incidentiæ. Revertetur itaq; inter plana *Cc*, *Dd* describendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph* &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h* &c. ac prius in *P*, *H* &c. emergetq; tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunq; assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. E. D.

Scholium.

Figure for Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namq; Lucem successive propagari & spatio quasi decem minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa, invenit, & ipse quoq; expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog*, *fnvnf*, *emtme*, *dlsld* sunt radii, arcubus *owo*, *nvn*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idq; magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.

Prop. XCVII. Prob. XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodq; incurvatio viæ

corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Figure for Prop. XCVII.

Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF* qua *AD* augetur, ad lineam *DG* qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM*, ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data ratione; centrisq; *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*: punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemq; ubivis tangendo determinabit. Q. E. I.

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in Optica & Geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hic propositione exponere.

Figure for Corol. 2. and Prop. XCVIII.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DK* semper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atq; adeo lineæ ipsæ *PD*, *QD*, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.

Prop. XCVIII. Prob. XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB descripta superficie quacunq; attractiva CD, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam EF, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.

Juncta *AB* secet superficiem primam in *C* & secundam in *E*, puncto *D* utcunq; assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data *M* ad aliam datam *N*; produc tum *AB* ad *G* ut sit *BG* ad *CE* ut *M* - *N* ad *N*, tum *AD* ad *H* ut sit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut sit *DK* ad *DH* ut *N* ad *M*. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsiq; *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. Q. E. F.

Nam concipe lineas *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DF* respective, & lineas *ER*, *ES* ipsis *FB*, *FD* ubiq; perpendiculares esse, adeoq; *QS* ipsi *CE* semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) *PD* ad *QD* ut *M* ad *N*, adeoq; ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*; & divisim ut *DL* - *FB* seu *PH* - *PD* - *FB* ad *FD* seu *FQ* - *QD*; & composite ut *HP* - *FB* ad *FQ*, id est (ob æquales *HP* & *CG*, *QS* & *CE*) *CE* + *BG* - *FR* ad *CE* - *FS*. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & *M* - *N* ad *N*) est etiam *CE* + *BG* ad *CE* ut *M* ad *N*: adeoq; divisim *FR* ad *FS* ut *M* ad *N*, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII. superficies *EF* cogit corpus in se secundum lineam *DF* incidens pergere in linea *FR*, ad locum *B*. Q. E. D.

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice figuratis & Aquam inter se claudentibus conflentur, fieri potest ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quo

minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quascunq; perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE MOTU CORPORUM

Liber SECUNDUS

SECT. I.

De Motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

Prop. I. Theor. I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus est ut spatium movendo confectum.

Nam cum motus singulis temporis particulis amissus sit ut velocitas, hoc est ut itineris confecti particula: erit componendo motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. E. D.

Corol. Igitur si corpus gravitate omni destitutum in spatiis liberis sola vi insita moveatur, ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum, dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

Lemma I.

Quantitates differentiis suis proportionales, sunt continue proportionales.

Sit A ad $A - B$ ut B ad $B - C$ & C ad $C - D$ &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D &c. Q. E. D.

Prop. II. Theor. II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & sola vi insita per Medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione Geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales, & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas, erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut

eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. I. Lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates his terminis proportionales, sunt in progressione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus, & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam Casu continue proportionales. Q. E. D.

Figure for Prop. II.

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. I. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. Q. E. D.

Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis *ADC*, *CH* describatur Hyperbola *BG*, sintq; *AB*, *DG* ad Asymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium eo tempore descriptum per lineam *AD*. Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *DC* in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eadem ratione.

Prop. III. Prob. I.

Figure for Prop. III.

Corporis, cui dum in Medio similari recta ascendit vel descendit,

resistitur in ratione velocitatis, quodq; ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BC*, & resistentia Medii initio ascensus per rectangulum *BD* sumptum ad contrarias partes. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur Hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo, tempore *DGgd*, describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*, tempore *AB2G2D* spatium descensus *BF2G*, atq; tempore *2D2G2g2d* spatium descensus *2GF2e2g*: & velocitates corporis (resistentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABF2D*, *AB2e2d* respective; atq; maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BC*.

Figure for Prop. III.

Resolvatur enim rectangulum *AH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atq; adeo (per Hypothesin) ut resistentia Medii in principio singulorum temporum æqualium. Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK*, ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deq; vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *NnHC*, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atq; adeo (per motus Legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn* &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione Geometrica. Quare si rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn* &c. productæ occurrant Hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t* &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN* &c. æquales, adeoq; tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area *ABqK* (per Corol. 3. Lem. VII. & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad ½*kq* seu *AC* ad ½*AK*, hoc est ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt* &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sint viribus grauitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est, (per Hypothesin) velocitatibus, atq; adeo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt

areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis *ABrL*, describit spatium *Blr*, & tempore *LrtN* spatium *rlnt*. Q. E. D. Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad excessum vis hujus supra vim qua in fine temporis illius resistitur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione Arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu (atq; etiam earundem differentia in descensu) decrescit in progressione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressione Geometrica.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

Prop. IV. Prob. II.

Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis, in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis.

Figure for Prop. IV.

E loco quovis *D* egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A* ut sit *DA* ad *AC* ut resistentia Medii ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim Gravitatis.

Describatur Hyperbola quævis *GTBS* secans erecta perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea *N* in ratione ad *QB* qua *DC* sit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *GK*, *DP* in *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem $tGT \div N$, & Projectile tempore *DRTG* perveniet ad punctum *r*, describens curvam lineam *DraF*, quam punctum *r* semper tangit; perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo *AB*, & postea semper appropinquans ad Asymptoton *PLC*. Estq; velocitas ejus in puncto quovis *r* ut Curvæ Tangens *rL*. Q. E. I.

Est enim *N* ad *QB* ut *DC* ad *CP* seu *DR* ad *RV*, adeoq; *RV* æqualis $DR \times QB \div N$, & *Rr* (id est *RV* - *Vr* seu $\{DR \times QB - tGT\} \div N$) æqualis $\{DR \times AB - RDGT\} \div N$. Exponatur jam tempus per aream *RDGT*, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoq; longitudo a motu ad latus descripta erit (per Prop. II. hujus) ut linea *DR*, altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea *Rr*. Ipso autem motus initio area *RDGT* æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoq; linea illa *Rr* (seu $\{DR \times AB - DR \times AQ\} \div N$) tunc est ad *DR* ut *AB* - *AQ* (seu *QB*) ad *N*, id est ut *CP* ad *DC*; atq; adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur *Rr* semper sit ut altitudo, ac *DR* semper ut longitudo, atq; *Rr* ad *DR* sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut *Rr* semper sit ad *DR* ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea *DraF*, quam punctum *r* perpetuo tangit. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vertice *D*, Diametro *DE* deorsum producta, & latere recto quod sit ad 2*DP* ut resistentia tota, ipso motus initio, ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco *D* secundum rectam *DP*, ut in Medio uniformi resistente describat Curvam *DraF*, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco *D*, secundum eandem rectam *DR*, ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipso motus initio, est $DV\ quad. \div Vr$ & *Vr* est $tGT \div N$ seu $DR \times Tt \div 2N$. Recta autem, quæ, si duceretur, Hyperbolam *GTB* tangeret in *G*, parallela est ipsi *DK*, ideoq; *Tt* est $CK \times DR \div DC$, & *N* erat $QB \times DC \div CP$. Et propterea *Vr* est $DRq. \times CK \times CP \div \{2CDq. \times QB\}$, id est (ob proportionales *DR* & *DC*, *DV* & *DP*) $DVq. \times CK \times CP \div \{2DPq. \times$

$QB\}$, & Latus rectum $DV\ quad. \div Vr$ prodit $2DPq. \times QB \div \{CK \times CP\}$, id est (ob proportionales *QB* & *CK*, *DA* & *AC*) $2DPq. \times DA \div \{AC \times CP\}$, adeoq; ad $2DP$ ut $DP \times DA$ ad $PC \times AC$; hoc est ut resistentia ad gravitatem. Q. E. D.

Corol. 2. Unde si corpus de loco quovis *D*, data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam *DP* projiciatur; & resistentia Medii ipso motus initio detur, inveniri potest Curva *DraF*, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2DP$ ad latus illud rectum ut est vis Gravitatis ad vim resistentiæ, datur *DP*. Dein secando *DC* in *A*, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione Gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum *A*. Et inde datur Curva *DraF*.

Corol. 3. Et contra, si datur curva *DraF*, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis *r*. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *rL*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis *r*.

Corol. 4. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in *D*; & ex aucta Velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, adeoq; velocitati semper proportionalem esse, neq; ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoq; velocitas.

Figure for
Corol. 5.

Corol. 5. Unde liquet methodus determinandi Curvam *DraF* ex Phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco *D*, secundum angulos diversos *CDP*, *cDp* (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *DC*. Tum, assumpta quacunq; longitudine pro *DP* vel *Dp*, fingatur quod resistentia in *D* sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*. Deinde per

computationem, ex longitudine illa assumpta *DP*, inveniantur longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione *Ff* ÷ *DF* per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ *SM*, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo *DF* per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem *DP* ut modo inventa longitudo *DF* ad longitudinem eandem per experimentum cognitam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum Curva Linea *DraF* quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum corpora resisti in ratione velocitatis Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant (uti posthac demonstrabitur) corpora resistuntur in duplicata ratione velocitatum. Actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis, adeoq; tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major, estq; resistentia (per motus Legem 2. & 3.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

SECT. II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

Prop. V. Theor. III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & sola vi insita per Medium similare movetur, tempora vero sumantur in progressione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione Geometrica inverse, & quod spatia sunt œqualia quœ singulis temporibus describuntur.

Figure for Prop. V.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia Medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ *AK*, *KL*, *LM*, &c. in recta *CD* sumptæ, & erigantur perpendicula *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. Hyperbolæ *BklmG*, centro *C* Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descriptæ occurrentia in *B*, *k*, *l*, *m*, &c. & erit *AB* ad *Kk* ut *CK* ad *CA*, & divisim $AB - Kk$ ad *Kk* ut *AK* ad *CA*, & vicissim $AB - Kk$ ad *AK* ut *Kk* ad *CA*, adeoq; ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde cum *AK* & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt *AB* & *Kk*, ut *ABq*. Et simili argumento erunt $Kk - Ll$, $Ll - Mm$, &c. ut *Kkq.*, *Llq.* &c. Linearum igitur *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* quadrata sunt ut earundem differentiæ, & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio secundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore descripta per arcam *AKkB*, velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines descriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. & composite, si tempus totum

exponatur per summam partium suarum *AM*, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut sint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progressione Geometrica, & erunt partes illæ in eadem progressione, & velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progressione eadem inversa, atq; spatia descripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. Q. E. D.

Corol. 1. Patet ergo quod si tempus exponatur per Asymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & spatium totum descriptum per aream Hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon spatium quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate prima *AB* in Medio non resistente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi *AB* in Medio non resistente simul describi posset, ut est area Hyperbolica *ABGD* ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistentia Medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ, in cadente corpore, tempore *AC*, in Medio non resistente, generare posset velocitatem *AB*. Nam si ducatur *BT* quæ tangat Hyperbolam in *B*, & occurrat Asymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipsi *AC*, & tempus exponet quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *AB*.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB*; & inde datur punctum *B* per quod Hyperbola Asymptotis *CH*, *CD* describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio similari resistente describere potest.

Prop. VI. Theor. IV.

Figure for Prop. VI.

Corpora Sphœrica homogenea & œqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quœ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper œqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descripta Hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc est spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam suis amissis *AB* - *ab*, *DE* - *de* proportionales. Q. E. D.

Prop. VII. Theor. V.

Corpora Sphœrica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quœ sunt ut motus primi directe & resistentiœ primœ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namq; motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut Motus directe & resistentia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, adeoq; retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. Q. E. D.

Corol. 1. Igitur si æquivelocia corpora resistuntur in duplicata ratione diametrorum, Globi homogenei quibuscunq; cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujusq; erit ut ejus velocitas & Massa conjunctim, id est ut velocitas & cubus diametri;

resistentia (per Hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est ut diameter directe & velocitas inverse; adeoq; spatium (tempori & velocitati proportionale) est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocia corpora resistuntur in ratione sesquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuscunq; cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquialtera ratione diametrorum inverse, amittent partes motuum proportionales totis. Nam tempus augetur in ratione resistentiæ diminutæ, & spatium augetur in ratione temporis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocia corpora resistuntur in ratione dignitatis cujuscunq; diametrorum, spatia quibus Globi homogenei, quibuscunq; cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicata. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ sint ut D^n & E^n, spatia quibus amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si Globi non sint homogenei, spatium a Globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim sub pari velocitate major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si Globi moveantur in Mediis diversis, spatium in Medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ, & spatium in ratione temporis.

Lemma II.

> *Momentum Genitæ æquatur momentis Terminorum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.*

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex Terminis quibuscunq; in Arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum,

vel extremarum & mediarum proportionalium absq; additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt Facti, Quoti, Radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica & similes. Has quantitates ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes hic considero, & eorum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitæ sunt magnitudinis, desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neq; enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Termini autem cujusq; Generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hunc Terminum.

Igitur sensus Lemmatis est, ut si quantitatum quarumcunq; perpetuo motu crescentium vel decrescentium *A*, *B*, *C*, &c. Momenta, vel mutationum velocitates dicantur *a*, *b*, *c*, &c. momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, & contenti ABC momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$: & dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{1/2}$, $A^{3/2}$, $A^{1/3}$, $A^{2/3}$, $1 \div A$, $1 \div A^2$, & $1 \div A^{1/2}$ momenta $2Aa$, $3aA^2$, $4aA^3$, $1/2aA^{-1/2}$, $3/2aA^{1/2}$, $1/3aA^{-2/3}$, $2/3aA^{-1/3}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-1/2aA^{-3/2}$ respective. Et generaliter ut dignitatis cujuscunq; $A^{n \div m}$ momentum fuerit $n \div m\ aA^{(n-m) \div m}$. Item ut Genitæ A *quad.* $\times B$ momentum fuerit $2aAB + A^2b$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4Cc$; & Genitæ $A^3 \div B^2$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus *A* & *B* deerant momentorum dimidia $½a$ & $½b$, fuit $A - ½a$ in $B - ½b$, seu $AB - ½aB - ½Ab + ¼ab$; & quam primum latera *A* & *B* alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + ½a$ in $B + ½b$ seu $AB + ½aB + ½Ab + ¼ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB + Ab$. Igitur laterum incrementis totis *a* & *b* generatur rectanguli incrementum $aB + Ab$. Q. E. D.

Cas. 2. Ponatur AB æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC + Gc$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + Ab$) $aBC + AbC + ABc$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunq;. Q. E. D.

Cas. 3. Ponantur A, B, C æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli AB, momentum $aB + Ab$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti ABC, momentum $aBC + AbC + ABc$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunq; A^n est naA^{n-1}. Q. E. D.

Cas. 4. Unde cum $1 \div A$ in A sit 1, momentum ipsius $1 \div A$ ductum in A, una cum $1 \div A$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est nihil. Proinde momentum ipsius $1 \div A$ seu A^{-1} est $-a \div A^2$. Et generaliter cum $1 \div A^n$ in A^n sit 1, momentum ipsius $1 \div A^n$ ductum in A^n una cum $1 \div A^n$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $1 \div A^n$ seu A^{-n} erit $-na \div A^{n+1}$. Q. E. D.

Cas. 5. Et cum $A^{½}$ in $A^{½}$ sit A, momentum ipsius $A^{½}$ in $2A^{½}$ erit a, per Cas. 3: ideoq; momentum ipsius $A^{½}$ erit $a \div 2A^{½}$ sive $2aA^{-½}$. Et generaliter si ponatur $A^{m \div n}$ æqualem B, erit A^m æquale B^n, ideoq; maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} seu $nb \div A^{m \div n}$, adeoq; $\{m \div n\}aA^{(m-n) \div n}$ æquale b, id est æquale momento ipsius $A^{m \div n}$. Q. E. D.

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunq; $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-1} + nbB^{n-1}$; idq; sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunq; dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus [Data æquatione quotcunq; fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versa] eandem celarem: rescripsit Vir Clarissimus se quoq; in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis. Utriusq; fundamentum continetur in hoc Lemmate.

Prop. VIII. Theor. VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inq; principiis singularum partium (addendo resistentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione Geometrica.

Figure for Prop. VIII.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC, ideoq; in dimidiata ratione resistentiæ) incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Asymptotis rectangulis CA, CH describatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK est ut $APq.$, erit hujus momentum KL ut illius momentum $2APQ$, id est ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, per motus Leg. 2. proportionale est vi generanti KC. Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob datum

rectangulum $KC \times KN$, ut *AP*. Atqui areæ Hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota Hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione Geometrica. Q. E. D. Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoq; si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in dimidiata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

Corol. 4. Sed & particula temporis, quo spatii particula quam minima *NKLO* in descensu describitur, est ut rectangulum $KN \times PQ$. Nam quoniam spatium *NKLO* est ut velocitas ducta in particulam temporis; erit particula temporis ut spatium illud applicatum ad velocitatem, id est ut rectangulum quam minimum $KN \times KL$ applicatum ad *AP*. Erat supra *KL* ut $AP \times PQ$. Ergo particula temporis est ut $KN \times PQ$, vel quod perinde est, ut $PQ \div CK$. Q. E. D.

Corol. 5. Eodem argumento particula temporis, quo spatii particula *nklo* in ascensu describitur, est ut $pq \div Ck$.

Prop. IX. Theor. VII.

Positis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolici sumantur velocitatibus

proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circuli, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ *AC*, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* semidiametro *AD* describatur tum circuli Quadrans *AtE*, tum Hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A* & Asymptoton *DC*. Jungantur *Dp*, *DP*, & erit sector circularis *AtD* ut tempus ascensus omnis futuri; & Sector Hyperbolicus *ATD* ut tempus descensus omnis præteriti, si modo Sectorem tangentes *Ap* & *AP* sint velocitates.

Figure for Prop. IX.

Cas. 1. Agatur enim *Dvq* abscindens Sectoris *ADt* & trianguli *ADp* momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas *tDv* & *pDq*. Cum particulæ illæ, ob angulum communem *D*, sunt in duplicata ratione laterum, erit particula *tDv* ut *qDp* ÷ *pD quad.* Sed *pD quad.* est *AD quad.* + *Ap quad.* id est *AD quad.* + *Ak* × *AD* seu *AD* × *Ck*; & *qDp* est ½*AD* × *pq*. Ergo Sectoris particula *vDt* est ut *pq* ÷ *Ck*, id est, per Corol. 5, Prop. VIII. ut particula temporis. Et componendo fit summa particularum omnium *tDv* in Sectore *ADt*, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis *Ap* particulis amissis *pq* respondentium, usq; dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, Sector totus *ADt* est ut ascensus totius futuri tempus.   Q. E. D.

Cas. 2. Agatur *DQV* abscindens tum Sectoris *DAV*, tum trianguli *DAQ* particulas quam minimas *TDV* & *PDQ*; & erunt hæ particulæ ad invicem ut *DTq*. ad *DPq*. id est (si *TX* & *AP* parallelæ sint) ut *DXq*. ad *DAq*. vel *TXq*. ad *APq*. & divisim ut *DXq*. - *TXq*. ad *ADq*. - *APq*. Sed ex natura Hyperbolæ *DXq*. - *TXq*. est *ADq*., & per Hypothesin *APq*. est *AD* × *AK*. Ergo particulæ sunt ad invicem ut *ADq*. ad *ADq*. - *AD* × *AK*; id est ut *AD* ad *AD* - *AK* seu *AC* ad *CK*: ideoq; Sectoris particula *TDV* est *PDQ* × *AC* ÷ *CK*, atq; adeo ob datas *AC* & *AD*, ut *PQ* ÷ *CK*; & propterea per Corol. 5. Prop. VIII. Lib. II. ut particula temporis incremento velocitatis *PQ* respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis *AP* particulæ *PQ* generantur, ut summa particularum Sectoris *ADT*, id est tempus totum ut Sector totus.   Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si *AB* æquetur quartæ parti ipsius *AC*, spatium *ABRP*, quod corpus tempore quovis *ATD* cadendo describit, erit ad spatium quod corpus semisse velocitatis maximæ *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area *ABRP*, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream *ATD* qua tempus exponitur. Nam cum sit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit 2*APQ* æquale *AC* × *KL* (per Corol. 1. Lem. II. hujus) adeoq; *KL* ad *PQ* ut 2*AP* ad *AC*, & inde *LKN* ad *PQ* × ½*AD* seu *DPQ* ut 2*AP* × *KN* ad ½*AC* × *AD*. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo ex æquo *LKN* est ad *DTV* ut 2*AP* × *KN* × *CK* ad ½*AC cub.*; id est, ob æquales *CKN* & ¼*ACq.*, ut *AP* ad *AC*; hoc est ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum *ABKN* & *AVD* momenta *LKN* & *DTV* sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoq; areæ totæ ab initio genitæ *ABKN* & *AVD* ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. E. D.

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore descriptum, ut est area *ABnk* ad Sectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum *APD* ad Sectorem Hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus *ATD*, & in Medio resistente est ut *AP*, id est ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *ApD* ad Sectorem circularem *AtD*, sive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem *AP* acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut Sector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus, quo velocitatem *Ap* in Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus *At* ad ejus Tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2. & 3. Theor. VI, Lib. II. indeq; datur & spatium quod semisse velocitatis illius dato tempore describi potest, & tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABKN* vel *ABkn*, quæ est ad Sectorem ut spatium quæsitum ad spatium jam ante inventum.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

Prop. X. Prob. III.

> *Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitq; resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis.*

Figure for Prop. X.

Sit *AK* planum illud plano Schematis perpendiculare; *ACK* linea curva; *C* corpus in ipsa motum; & *FCf* recta ipsam tangens in *C*. Fingatur autem corpus *C* nunc progredi ab *A* ad *K* per lineam illam *ACK*, nunc vero regredi per eandem lineam; & in progressu impediri a Medio, in regressu æque promoveri, sic ut in iisdem locis eadem semper sit corporis progredientis & regredientis velocitas. Æqualibus autem temporibus describat corpus progrediens arcum quam minimum *CG*, & corpus regrediens arcum *Cg*; & sint *CH*, *Ch* longitudines æquales rectilineæ, quas corpora de loco *C* exeuntia, his temporibus, absq; Medii & Gravitatis actionibus describerent: & a punctis *C*, *G*, *g*, ad planum horizontale *AK* demittantur perpendicula *CB*, *GD*, *gd*, quorum *GD* ac *gd* tangenti occurrant in *F* & *f*. Per Medii resistentiam fit ut corpus progrediens, vice longitudinis *CH*, describat solummodo longitudinem *CF*; & per vim gravitatis transfertur corpus de *F* in *G*: adeoq; lineola *HF* vi resistentiæ, & lineola *FG* vi gravitatis simul generantur. Proinde (per Lem. X. Lib. I.) lineola *FG* est ut vis gravitatis & quadratum temporis conjunctim, adeoq; (ob datam

gravitatem) ut quadratum temporis; & lineola *HF* ut resistentia & quadratum temporis, hoc est ut resistentia & lineola *FG*. Et inde resistentia fit ut *HF* directe & *FG* inverse, sive ut $HF \div FG$. Hæc ita se habent in lineolis nascentibus. Nam in lineolis finitæ magnitudinis hæ rationes non sunt accuratæ.

Et simili argumento est *fg* ut quadratum temporis, adeoq; ob æqualia tempora æquatur ipsi *FG*; & impulsus quo corpus regrediens urgetur est ut $hf \div fg$. Sed impulsus corporis regredientis & resistentia progredientis ipso motus initio æquantur, adeoq; & ipsis proportionales $hf \div fg$ & $HF \div FG$ æquantur; & propterea ob æquales *fg* & *FG*, æquantur etiam *hf* & *HF*, suntq; adeo *CF*, *CH* (vel *Ch*) & *Cf* in progressione Arithmetica, & inde *HF* semidifferentia est ipsarum *Cf* & *CF*; & resistentia quæ supra fuit ut $HF \div FG$, est ut $\{Cf - CF\} \div FG$.

Est autem resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis. Velocitas autem ut descripta longitudo *CF* directe & tempus $\sqrt{FG}$ inverse, hoc est ut $CF \div \sqrt{FG}$, adeoq; quadratum velocitatis ut $CFq. \div FG$. Quare resistentia, ipsiq; proportionalis $\{Cf - CF\} \div FG$ est ut Medii densitas & ut $CFq. \div FG$ conjunctim; & inde Medii densitas ut $\{Cf - CF\} \div FG$ directe & $CFq. \div FG$ inverse, id est ut $\{Cf - CF\} \div CFq.$ Q. E. I.

Corol. 1. Et hinc colligitur, quod si in *Cf* capiatur *Ck* æqualis *CF*, & ad planum horizontale *AK* demittatur perpendiculum *ki*, secans curvam *ACK* in *l*; fiet Medii densitas ut $\{FG - kl\} \div \{CF \times FG + kl\}$. Erit enim *fC* ad *kC* ut $\sqrt{fg}$ seu $\sqrt{FG}$ ad $\sqrt{kl}$, & divisim *fk* ad *kC*, id est $Cf - CF$ ad *CF* ut $\sqrt{FG} - \sqrt{kl}$ ad $\sqrt{kl}$; hoc est (si ducatur terminus uterq; in $\sqrt{FG} + \sqrt{kl}$) ut $FG - kl$ ad $kl + \sqrt{FG \times kl}$, sive ad $FG + kl$. Nam ratio prima nascentium $kl + \sqrt{FG \times kl}$ & $FG + kl$ est æqualitatis. Scribatur itaq; $\{FK - Kl\} \div \{FK + Kl\}$ pro $\{Cf - CF\} \div CF$; & Medii densitas, quæ fuit ut $\{Cf - CF\} \div CF$ *quad.* evadet ut $\{FG - kl\} \div \{CF \times FG + kl\}$.

Corol. 2. Unde cum $2HF$ & $Cf - CF$ æquentur, & *FG* & *kl* (ob rationem æqualitatis) componant $2FG$; erit $2HF$ ad *CF* ut $FG - kl$ ad $2FG$; et inde *HF* ad *FG*, hoc est resistentia ad gravitatem, ut rectangulum *CF* in $FG - kl$ ad $4FG$ *quad.*

Corol. 3. Et hinc si curva linea definiatur per relationem inter basem

seu abscissam AB & ordinatim applicatam BC; (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur: ut in Exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea ACK semicirculus super diametro AK descriptus, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bisecetur semicirculi diameter AK in O; & dic OK n, OB a, BC e, & BD vel Bi o: & erit $DGq.$ seu $OGq. - ODq.$ æquale $nn - aa - 2ao - oo$ seu $ee - 2ao - oo$; & radice per methodum nostram extracta, fiet $DG = e - ao \div e - oo \div 2e - aaoo \div 2e^3 - ao^3 \div 2e^3 - a^3o^3 \div 2e^5$ &c. Hic scribatur nn pro $ee + aa$ & evadet $DG = e - ao \div e - nnoo \div 2e^3 - anno^3 \div 2e^5$ &c.

Hujusmodi Series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; secundum in quo quantitas illa extat unius dimensionis; tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus, qui hic est e, denotabit semper longitudinem ordinatæ BC insistentis ad indefinitæ quantitatis initium B; secundus terminus qui hic est $ao \div e$, denotabit differentiam inter BC & DF, id est lineolam IF, quæ abscinditur complendo parallelogrammum $BC - ID$, atq; adeo positionem Tangentis CF semper determinat: ut in hoc casu capiendo IF ad IC ut est $ao \div e$ ad o seu a ad e. Terminus tertius, qui hic est $nnoo \div 2e^3$ designabit lineolam FG, quæ jacet inter Tangentem & Curvam, adeoq; determinat angulum contactus FCG, seu curvaturam quam curva linea habet in C. Si lineola illa FG finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum subsequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinite minores tertio, ideoq; negligi possunt. Terminus quartus, qui hic est $anno^3 \div 2e^5$, exhibet variationem Curvaturæ; quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum Serierum in solutione Problematum, quæ pendent a Tangentibus & curvatura Curvarum.

Præterea CF est latus quadratum ex $CIq.$ & $IFq.$ hoc est ex $BDq.$ & quadrato termini secundi. Estq; $FG + kl$ æqualis duplo termini tertii, & $FG - kl$ æqualis duplo quarti. Nam valor ipsius DG convertitur in

valorem ipsius *il*, & valor ipsius *FG* in valorem ipsius *kl*, scribendo *Bi* pro *BD*, seu -*o* pro +*o*. Proinde cum *FG* sit - $nnoo \div 2e^3$ - $anno^3 \div 2e^5$ &c. erit $kl =$ - $nnoo \div 2e^3 + anno^3 \div 2e^5$, &c. Et horum summa est - $nnoo \div e^3$, differentia - $anno^3 \div e^5$. Terminum quintum & sequentes hic negligo, ut infinite minores quam qui in hoc Problemate considerandi veniant. Itaq; si designetur Series universaliter his terminis $\pm$ *Qo* - *Roo* - So^3 &c. erit *CF* æqualis $\surd oo + QQoo$, $FG + kl$ æqualis 2*Roo*, & *FG* - *kl* æqualis $2So^3$. Pro *CF*, $FG + kl$ & *FG* - *kl* scribantur hi earum valores, & Medii densitas quæ erat ut {*FG* - *kl*} $\div$ {*CF* in $FG + kl$} jam fiet ut $S \div \{R \surd 1 + QQ\}$. Deducendo igitur Problema unumquodq; ad seriem convergentem, & hic pro *Q*, *R* & *S* scribendo terminos seriei ipsis respondentes; deinde etiam ponendo resistentiam Medii in loco quovis *G* esse ad Gravitatem ut $S\surd 1 + QQ$ ad 2*RR*, & velocitatem esse illam ipsam quacum corpus, de loco *C* secundum rectam *CF* egrediens, in Parabola, diametrum *CB* & latus rectum $\{1 + QQ\} \div R$ habente, deinceps moveri posset, solvetur Problema.

Sic in Problemate jam solvendo, si scribantur $\surd 1 + aa \div ee$ seu $n \div e$ pro $\surd 1 + QQ$, $nn \div 2e^3$ pro *R*, & $ann \div 2e^3$ pro *S*, prodibit Medii densitas ut $a \div ne$, hoc est (ob datam *n*) ut $a \div e$ seu $OB \div BC$, id est ut Tangentis longitudo illa *CT*, quæ ad semidiametrum *OL* ipsi *AK* normaliter insistentem terminatur, & resistentia erit ad gravitatem ut *a* ad *n*, id est ut *OB* ad circuli semidiametrum *OK*, velocitas autem erit ut $\surd 2BC$. Igitur si corpus *C* certa cum velocitate, secundum lineam ipsi *OK* parallelam, exeat de loco *L*, & Medii densitas in singulis locis *C* sit ut longitudo tangentis *CT*, & resistentia etiam in loco aliquo *C* sit ad vim gravitatis ut *OB* ad *OK*; corpus illud describet circuli quadrantem *LCK*. Q. E. I.

At si corpus idem de loco *A* secundum lineam ipsi *AK* perpendicularem egrederetur, sumenda esset *OB* seu *a* ad contrarias partes centri *O*, & propterea signum ejus mutandum esset, & scribendum -*a* pro +*a*. Quo pacto prodiret Medii densitas ut $-a \div e$. Negativam autem densitatem (hoc est quæ motus corporum accelerat) Natura non admittit, & propterea naturaliter fieri non potest ut corpus ascendendo ab *A* describat circuli quadrantem *AL*. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea *ALCK* Parabola, axem habens *OL* horizonti *AK*

perpendicularem, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut projectile in ipsa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum *ADK* æquale est rectangulo sub ordinata *DG* & recta aliqua data: hoc est, si dicantur recta illa *b*, *AB* *a*, *AK* *c*, *BC* *e* & *BD* *o*; rectangulum $a + o$ in $c - a - o$ seu $ac - aa - 2ao + co - oo$ æquale est rectangulo *b* in *DG*, adeoq; *DG* æquale $\{ac - aa\} \div b + \{\{c - 2a\} \div b\}o - oo \div b$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\{\{c - 2a\} \div b\}\ o$ pro Qo, & ejus coefficiens $\{c - 2a\} \div b$ pro *Q*; tertius item terminus $oo \div b$ pro Roo, & ejus coefficiens $1 \div b$ pro *R*. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti termini So^3 coefficiens *S* evanescere, & propterea quantitas $S \div \{R\surd 1 + QQ\}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. Q. E. I.

Figure for Exempl. 3.

Exempl. 3. Sit linea *AGK* Hyperbola, Asymptoton habens *NX* plano horizontali *AK* perpendicularem; & quæratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit *MX* Asymptotos altera, ordinatim applicatæ *DG* productæ occurrens in *V*, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum *XV* in *VG* dabitur. Datur autem ratio *DN* ad *VX*, & propterea datur etiam rectangulum *DN* in *VG*. Sit illud *bb*; & completo parallelogrammo *DNXZ*, dicatur *BN* *a*, *BD* *o*, *NX* *c*, & ratio data *VZ* ad *ZX* vel *DN* ponatur esse $m \div n$. Et erit *DN* æqualis $a - o$, *VG* æqualis $bb \div \{a - o\}$, *VZ* æqualis $m \div n\ a - o$, & *GD* seu *NX* - *VZ* - *VG* æqualis $c - \{m \div n\}a + \{m \div n\}o - bb \div \{a - o\}$. Resolvatur terminus $bb \div \{a - o\}$ in seriem convergentem $bb \div a + \{bb \div aa\}o + \{bb \div a^3\}oo + \{bb \div a^4\}o^3$ etc. & fiet *GD* æqualis $c - \{m \div n\}a - bb \div a + \{m \div n\}o - \{bb \div aa\}o - \{bb \div a^3\}o^2 - \{bb \div a^4\}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\{m \div n\}o - \{bb \div aa\}o$ usurpandus est pro Qo, tertius cum signo mutato $\{bb \div a^3\}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\{bb \div a^4\}o^3$ pro So^3, eorumq; coefficientes $m \div n - bb \div aa$, $bb \div a^3$ & $bb \div a^4$ scribendæ sunt, in Regula superiore, pro *Q*, *R* & *S*. Quo facto prodit medii densitas ut

seu

est, si in *VZ* sumatur *VY* æqualis *VG*, ut 1 ÷ *XY*. Namq; *aa* & {*mm* ÷ *nn*}*aa* - 2*mbb* ÷ *n* + b^4 ÷ *aa* sunt ipsarum *XZ* & *ZY* quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad Gravitatem quam habet *XY* ad *YG*, & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem *G* diametrum *DG* & latus rectum *YX quad.* ÷ *VG* habente. Ponatur itaq; quod Medii densitates in locis singulis *G* sint reciproce ut distantiæ *XY*, quodq; resistentia in loco aliquo *G* sit ad gravitatem ut *XY* ad *YG*; & corpus de loco *A* justa cum velocitate emissum describet Hyperbolam illam *AGK*. Q. E. I.

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea *AGK* Hyperbola sit, centro *X* Asymptotis *MX*, *NX*, ea lege descripta, ut constructo rectangulo *XZDN* cujus latus *ZD* secet Hyperbolam in *G* & Asymptoton ejus in *V*, fuerit *VG* reciproce ut ipsius *ZX* vel *DN* dignitas aliqua ND^n, cujus index est numerus *n*: & quæratur Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro *DN*, *BD*, *NX* scribantur *A*, *O*, *C* respective, sitq; *VZ* ad *ZX* vel *DN* ut *d* ad *e*, & *VG* æqualis *bb* ÷ DN^n, & erit *DN* æqualis *A* - *O*, *VG* = *bb* ÷ $\{A - O\}^n$, *VZ* = *d* ÷ *e* in *A* - *O*, & *GD* seu *NX* - *VZ* - *VG* æqualis *C* - {*d* ÷ *e*}*A* + {*d* ÷ *e*}*O* - *bb* ÷ $\{A - O\}^n$. Resolvatur terminus ille *bb* ÷ $\{A - O\}^n$ in seriam infinitam

$$\frac{bb}{A^n} + \frac{nbbO}{A^{n+1}} + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3 \text{ \&c.}$$

ac fiet *GD* æqualis

$$C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3 \text{ \&c.}$$

Hujus seriei terminus secundus {*d* ÷ *e*}*O* - {*nbb* ÷ An^{+1}}*O*

usurpandus est pro Qo, tertius $\{\{nn + n\} \div 2An^{+2}\}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\{\{n^3 + 3nn + 2n\} \div 6An^{+3}\}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii densitas $S \div \{R \times \surd 1 + QQ\}$, in loco quovis G, fit

$$n + 2$$

adeoq; si in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, est reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $\{dd \div ee\}A^2 - 2dnbb \div eA^n$ in $A + nnb^4 \div A^2n$ ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad Gravitatem ut S in $XY \div A$ ad $2RR$, id est XY ad $\{\{3nn + 3n\} \div \{n + 2\}\}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & Latus rectum $\{1 + QQ\} \div R$ seu $2XY$ *quad.* $\div \{nn + n$ in $VG\}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Quoniam motus non fit in Parabola nisi in Medio non resistente, in Hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam Projectile in Medio uniformiter resistente describit, propius accedit ad Hyperbolas hasce quam ad Parabolam. Est utiq; linea illa Hyperbolici generis, sed quæ circa verticem magis distat ab Asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur.

Compleatur parallelogrammum *XYGT*, & ex natura harum Hyperbolarum facile colligitur quod recta *GT* tangit Hyperbolam in *G*, ideoq; densitas Medii in *G* est reciproce ut tangens *GT*, & velocitas ibidem ut $\surd\{GTq. \div GV\}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut *GT* ad $\{\{3nn + 3n\} \div \{n + 2\}\}GV$.

Proinde si corpus de loco *A* secundum rectam *AH* projectum describat Hyperbolam *AGK*, & *AH* producta occurrat Asymptoto *NX* in *H*, actaq; *AI* occurrat alteri Asymptoto *MX* in *I*: erit Medii densitas in *A* reciproce ut *AH*, & corporis velocitas ut $\surd\{AHq. \div AI\}$, ac resistentia ibidem ad Gravitatem ut *AH* ad $\{3nn + 3n\} \div \{n + 2\}$ in *AI*. Unde prodeunt sequentes Regulæ.

Reg. 1. Si servetur Medii densitas in *A* & mutetur angulus *NAH*, manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoq; si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari potest.

Reg. 2. Si servetur tum angulus *NAH* tum Medii densitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; servabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus *NAH* quam corporis velocitas in *A*, gravitasq; acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione, quacunque: augebitur proportio *AH* ad *AI* eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eiq; proportionali longitudine $AHq. \div AI$; & propterea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel Medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

Reg. 4. Quoniam densitas Medii prope verticem Hyperbolæ major est quam in loco *A*, ut servetur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad Tangentem *AH* inveniri, & densitas in *A*, per Regulam tertiam, diminui in ratione paulo minore quam semisummæ Tangentium ad Tangentium *AH*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & describenda sit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut sit *HX* æqualis facto sub $n + 1$ & *AI*; centroq; *X* & Asymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* describatur Hyperbola, ea lege ut sit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

Figure for
Reg. 7.

Reg. 6. Quo major est numerus *n*, eo magis accuratæ sunt hæ Hyperbolæ in ascensu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus descensu ad *G*; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estq; cæteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* transeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Asymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & sumatur *NK* ipsi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem velocitate, in angulis diversis *HAK*, *hAk*, incidentq; in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo *AI*, assume utcunq; longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* sit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem assumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $AK \div Ak - d \div e$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda sunt plura puncta *N*: & tum demum si per omnia agatur Curva linea regularis *NNXN*, hæc abscindet *SX* quæsitæ longitudini *AH* æqualem. Ad usus Mechanicos sufficit longitudines *AH*, *AI* easdem in angulis omnibus *HAK* retinere. Sin figura ad inveniendam resistentiam Medij accuratius determinanda sit, corrigendæ sunt semper hæ longitudines per Regulam quartam.

Figure for Reg. 8.

Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; si jam desideretur positio rectæ *AH*, secundum quam Projectile data illa cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorsum tendat, & æquetur ipsi *AI* seu ½*HX*. Asymptotis *AK*, *KF* describatur Hyperbola, cujus Conjugata transeat per punctum *C*, centroq; *A* & intervallo *AH* describatur Circulus secans Hyperbolam illam in

puncto *H*; & projectile secundum rectam *AH* emissum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur *CH* occurrens ipsis *AK* & *KF*, illi in *C*, huic in *F*, & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* est ad *AE* ut *FH* ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Asymptotis *AK*, *KF* descriptam, cujus conjugata transit per punctum *C*, atq; adeo reperitur in communi intersectione Hyperbolæ hujus & circuli descripti. *Q. E. D.* Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, sive recta *AKN* horizonti parallela sit, sive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodq; ex duabus intersectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*, quorum minor eligendus est; & quod in Praxi mechanica sufficit circulum semel describere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis sit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *HK* sitæ.

Figure for Reg. 8.

Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si *XAGK* Parabolam designet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, sintq; ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abscissarum *XI*, *XV* dignitates XI^n, XV^n; agantur *XT*, *TG*, *HA*, quarum *XT* parallela sit *VG*, & *TG*, *HA* parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, secundum rectam *AH* productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medij, in locis singulis *G*, sit reciproce ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quacum Projectile pergeret, in spatio non resistente, in Parabola Conica, verticem *G*, diametrum *VG* deorsum productam, & latus rectum $\sqrt{2TGq. \div \{nn - n\, XVG\}}$ habente. Et resistentia in *G* erit ad vim Gravitatis ut *TG* ad $\{\{3nn - 3n\} \div \{n - 2\}\}VG$. Vnde si *NAK* lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medij in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunq; angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*, & inde datur Parabolæ vertex *X*, & positio rectæ *XI*, & sumendo *VG* ad *IA* ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta *G*, per quæ Projectile transibit.

SECT. III.

De motu corporum quæ resistuntur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.

Prop. XI. Theor. VIII.

Si corpus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & sola vi insita in Medio similari movetur, sumantur autem tempora in progressione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, data quadam quantitate auctæ, erunt in progressione Geometrica.

Figure for Prop. XI.

Centro *C*, Asymptotis rectangulis *CADd* & *CH* describatur Hyperbola *BEeS*, & Asymptoto *CH* parallelæ sint *AB*, *DE*, *de*. In Asymptoto *CD* dentur puncta *A*, *G*: Et si tempus exponatur per aream Hyperbolicam *ABED* uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem *DF*, cujus reciproca *GD* una cum data *CG* componat longitudinem *CD* in progressione Geometrica crescentem.

Sit enim areola *DEed* datum temporis incrementum quam minimum, & erit *Dd* reciproce ut *DE*, adeoque directe ut *CD*. Ipsius autem $1 \div GD$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) est $Dd \div GDq.$ erit ut $CD \div GDq.$ seu $\{CG + GD\} \div GDq.$, id est, ut $\{1 \div GD\} + \{CG \div GDq.\}$. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter crescente, decrescit $1 \div GD$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $1 \div GD$ decrementum est ut summa quantitatum $1 \div GD$ & $CG \div GDq.$, quarum prior est ipsa $1 \div GD$, & posterior $CG \div GDq.$ est ut $1 \div GDq.$. Proinde $1 \div GD$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas *GD* ipsi $1 \div GD$ reciproce proportionalis quantitate data *CG* augeatur, summa *CD*, tempore *ABED* uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream Hyperbolicam *ABED*, exponi potest velocitas per ipsius *GD* reciprocam 1 ÷ *GD*.

Corol. 2. Sumendo autem *GA* ad *GD* ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

Prop. XII. Theor. IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.

In Asymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD*, in Progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium *RSED* augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum spatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum est ipsius *GD*, erit reciproce ut *ED*, adeoq; directe ut *CD*, hoc est ut summa ejusdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula *DdeE* describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa dearum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ *GD*, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum *R*, invenietur punctum *G*, capiendo *GD* ad *GR* ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis *ABED* descriptum. Invento autem puncto *G*, datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI. detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

Prop. XIII. Theor. X.

Figure for Prop. XIII.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod si Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quœdam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque *D* & semidiametro quovis *DB* describatur circuli quadrans *BETF*, & per semidiametri *DB* terminum *B* agatur infinita *BAP*, semidiametro *DF* parallela. In ea detur punctum *A*, & capiatur segmentum *AP* velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, fit resistentia tota in *P* ut *AP quad.* + 2*PAB*. Jungantur *DA*, *DP* circulum secantes in *E* ac *T*, & exponatur gravitas per *DA* quadratum, ita ut sit gravitas ad resistentiam in *P* ut *DAq.* ad *APq.* + 2*PAB*: & tempus ascensus omnis futuri erit ut circuli sector *EDTE*.

Agatur enim *DVQ*, abscindens & velocitatis *AP* momentum *PQ*, & Sectoris *DET* momentum *DTV* dato temporis momento respondens: & velocitatis decrementum illud *PQ* erit ut summa virium gravitatis *DBq.* & resistentiæ *APq.* + 2*BAP*, id est (per *Prop. 12. Lib. II.* Elem.) ut *DP quad.* Proinde area *DPQ*, ipsi *PQ* proportionalis, est ut *DP quad.*; & area *DTV*, (quæ est ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.*) est ut datum *DTq.* Decrescit igitur area *EDT* uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori ascensus futuri proportionalis est. *Q. E. D.*

Figure for Cas. 2.

Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem *AP* ut prius, & resistentia ponatur esse ut *APq.* + 2*BAP*, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per *DAq.* exponi possit; capiatur *BD* ejus longitudinis, ut sit *ABq.* - *BDq.* gravitati proportionale, sitque *DF* ipsi *DB* perpendicularis & æqualis, & per verticem *F* describatur Hyperbola *FTVE* cujus semidiametri conjugatæ sint *DB* & *DF*, quæq; secet *DA* in *E*, & *DP*, *DQ* in *T* & *V*; & erit tempus ascensus futuri ut Hyperbolæ sector *TDE*.

Nam velocitatis decrementum *PQ*, in data temporis particula factum, est ut summa resistentiæ *APq.* + 2*ABP* & gravitatis *ABq.* - *BDq.* id est ut *BPq.* - *BDq.* Est autem area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.* adeoque, si ad *DF* demittatur perpendiculum *GT*, ut *GTq.* seu *GDq.* - *DFq.* ad *BDq.* utque *GDq.* ad *PBq.* & divisim ut *DFq.* ad *BPq.* - *DBq.* Quare cum area *DPQ* sit ut *PQ*, id est ut *BPq.* - *BDq.* erit area *DTV* ut datum *DFq*. Decrescit igitur area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum *DTV*, & propterea tempori proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 3. Sit *AP* velocitas in descensu corporis, & *APq.* + 2*ABP* resistentia, & *DBq.* - *ABq.* vis gravitatis, existente angulo *DAB* recto. Et si centro *D*, vertice principali *B*, describatur Hyperbola rectangula *BETV* secans productas *DA*, *DP* & *DQ* in *E*, *T* & *V*; erit Hyperbolæ hujus sector *DET* ut tempus descensus.

Figure for Cas. 3.

Nam velocitatis incrementum *PQ*, eiq; proportionalis area *DPQ*, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut *DBq.* - *ABq.* - 2*ABP* - *APq.* seu *DBq.* - *BPq.* Et area *DTV* est ad aream *DPQ* ut *DTq.* ad *DPq.* adeoq; ut *GTq.* seu *GDq.* - *BDq.* ad *BPq.* utque *GDq.* ad *BDq.* & divisim ut *BDq.* ad *BDq.* - *BPq.* Quare cum area *DPQ* sit ut *BDq.* - *BPq.* erit area *DTV* ut datum *BDq.* Crescit igitur area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori descensus proportionalis est. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas *AP* est ad velocitatem quam corpus tempore *EDT*, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli *DAP* ad aream sectoris centro *D*, radio *DA*, angulo *ADT* descripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam

velocitas in Medio non resistente, tempori atque adeo Sectori huic proportionalis est; in Medio resistente est ut triangulum; & in Medio utroq; ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more Sectoris & Trianguli.

Prop. XIV. Prob. IV.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut summa vel differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.

Capiatur *AC* (*in Fig. tribus ultimis,*) gravitati, & *AK* resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti *A* si corpus ascendit, aliter ad contrarias. Erigatur *Ab* quæ sit ad *DB* ut *DBq.* ad 4*BAC*: & area *AbNK* augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires *CK* in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ *AbNK* supra aream *DET*.

Nam cum *AK* sit ut resistentia, id est ut *APq.* + 2*BAP*; assumatur data quævis quantitas *Z*, & ponatur *AK* æqualis {*APq.* + 2*BAP*} ÷ *Z*; & (per hujus Lem. II.) erit ipsius *AK* momentum *KL* æquale {2*APQ* + 2*BA* × *PB*} ÷ *Z* seu 2*BPQ* ÷ *Z*, & areæ *AbNK* momentum *KLON* æquale 2*BPQ* × *LO* ÷ *Z* seu {*BPQ* × *BD cub.*} ÷ {2*Z* × *CK* × *AB*}.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut *ABq.* + *BDq.* existente *BET* circulo, (*in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.*) linea *AC*, quæ gravitati proportionalis est, erit {*ABq.* + *BDq.*} ÷ *Z* & *DPq.* seu *APq.* + 2*BAP* + *ABq.* + *BDq.* erit *AK* × *Z* + *AC* × *Z* seu *CK* × *Z*; ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DTq.* vel *DBq.* ad *CK* × *Z*.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut *ABq.* - *BDq.* linea *AC* (*Fig. Cas. 2. Prop. XIII.*) erit {*ABq.* - *BDq.*} ÷ *Z*, & *DTq.* erit ad *DPq.* ut *DFq.* seu *DBq.* ad *BPq.* - *BDq.* seu *APq.* + 2*BAP* + *ABq.* - *BDq.* id est ad *AK* × *Z* + *AC* × *Z* seu *CK* × *Z*. Ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DBq.* ad *CK* × *Z*.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut *BDq.* - *ABq.* & linea *AC* (*Fig. Cas. 3. Prop. præced.*) æquetur {*BDq.* - *ABq.*} ÷ *Z* erit area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DBq.* ad

$CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione; si pro area *DTV*, qua momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area *DPQ*, id est, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut *CK* in *Z* ad *BDq*. Atq; inde fit *PQ* in *BD cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ *AbNK* momentum *KLON* superius inventum, fit $BP \times BD \times m \div AB$. Auferatur areæ *DET* momentum *DTV* seu $BD \times m$, & restabit $AP \times BD \times m \div AB$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $AP \times BD \times m \div AB$; & propterea (ob datum $BD \times m \div AB$) ut velocitas *AP*, id est ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia, & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si longitudo aliqua *V* sumatur in ea ratione ad arcum *ET*, quam habet linea *DA* ad lineam *DE*; spatium quod corpus ascensu vel descensu toto in Medio resistente describit, erit ad spatium quod in Medio non resistente eodem tempore describere posset, ut arearum illarum differentia ad $BD \times V^2 \div 4AB$, ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in Medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2, & ob datas *BD* & *AB*, ut $BD \times V^2 \div 4AB$. Tempus autem est ut *DET* seu $\frac{1}{2}BD \times ET$, & harum arearum momenta sunt ut $BD \times V \div 2AB$ ductum in momentum ipsius *V* & $\frac{1}{2}BD$ ductum in momentum ipsius *ET*, id est, ut $BD \times V \div 2AB$ in $DAq. \times 2m \div DEq.$ & $\frac{1}{2}BD \times 2m$, sive ut $\{BD \times V \times DAq. \times m\} \div \{AB \times DEq.\}$ & $BD \times m$. Et propterea momentum areæ V^2 est ad momentum differentiæ arearum *DET* & *AKNb*, ut $\{BD \times V \times DA \times m\} \div \{AB \times DE\}$ ad $AP \times BD \times m \div AB$ sive ut $V \times DA \div DE$ ad *AP*; adeoque, ubi *V* & *AP* quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur est area quam minima $BD \times V^2 \div 4AB$ differentiæ quam minimæ arearum *DET* & *AKNb*. Unde cum spatia in Medio utroque, in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc sunt ad invicem ut area $BD \times V^2 \div 4AB$ & arearum *DET* & *AKNb* differentia; ob eorum analoga incrementa necesse est ut in æqualibus quibuscunque temporibus sint ad invicem ut area illa $BD \times V^2 \div 4AB$ & arearum *DET* & *AKNb* differentia. *Q. E. D.*

SECT. IV.

De Corporum circulari Motu in Mediis resistentibus.

LEM. III.

Sit PQRr *Spiralis quæ secet radios omnes* SP*,* SQ*,* SR*, &c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P*, secetque radium* SQ *in* T*; & ad Spiralem erectis perpendiculis* PO*,* QO *concurrentibus in* O*, jungatur* SO*. Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Figure for Lemma III. and Prop. XV.

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* subducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui transit per puncta *O*, *S*, *P* transibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q. E. D.*

Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu *PO* ad *PS*. Item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad *PO*. Et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad *PS*. Unde fit *PQq*. æqualis *TQ* × *PS*. *Q. E. D.*

Prop. XV. Theor. XI.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore Lemmate, & producatur *SQ* ad *V*, ut sit *SV* æqualis *SP*. Temporibus æqualibus describat corpus arcus quam

minimos *PQ* & *QR*, sintque areæ *PSQ*, *QSr* æquales. Et quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P est reciproce ut *SPq*. & (per Lem. X. Lib. I.) lineola *TQ*, quæ vi illa generatur, est in ratione composita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus *PQ* describitur, (Nam resistentiam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta negligo) erit *TQ* × *SPq*. id est (per Lemma novissimum) *PQq*. × *SP*, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus est ut *PQ* × √*SP*, & corporis velocitas qua arcus *PQ* illo tempore describitur ut *PQ* ÷ {*PQ* × √*SP*} seu 1 ÷ √*SP*, hoc est in dimidiata ratione ipsius *SP* reciproce. Et simili argumento velocitas, qua arcus *QR* describitur, est in dimidiata ratione ipsius *SQ* reciproce. Sunt autem arcus illi *PQ* & *QR* ut velocitates descriptrices ad invicem, id est in dimidiata ratione *SQ* ad *SP*, sive ut *SQ* ad √*SP* × √*SQ*; & ob æquales angulos *SPQ*, *SQr* & æquales areas *PSQ*, *QSr*, est arcus *PQ* ad arcum *Qr* ut *SQ* ad *SP*. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus *PQ* ad arcum *Rr* ut *SQ* ad *SP* - $SP^{½}$ × $SQ^{½}$, seu ½*VQ*; nam punctis *P* & *Q* coeuntibus, ratio ultima *SP* - $SP^{½}$ × $SQ^{½}$ ad ½*VQ* fit æqualitatis. In Medio non resistente areæ æquales *PSQ*, *QSr* (Theor. I. Lib. I.) temporibus æqualibus describi deberent. Ex resistentia oritur arearum differentia *RSr*, & propterea resistentia est ut lineolæ *Qr* decrementum *Rr* collatum cum quadrato temporis quo generatur. Nam lineola *Rr* (per Lem. X. Lib. I.) est in duplicata ratione temporis. Est igitur resistentia ut *Rr* ÷ {*PQq*. × *SP*}. Erat autem *PQ* ad *Rr* ut *SQ* ad ½*VQ*, & inde *Rr* ÷ {*PQq*. × *SP*} fit ut ½*VQ* ÷ {*PQ* × *SP* × *SQ*} sive ut ½*OS* ÷ {*OP* × *SPq*.}. Namque punctis *P* & *Q* coeuntibus, *SP* & *SQ* coincidunt; & ob similia triangula *PVQ*, *PSO*, fit *PQ* ad ½*VQ* ut *OP* ad ½*OS*. Est igitur *OS* ÷ {*OP* × *SPq*.} ut resistentia, id est in ratione densitatis Medii in *P* & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio 1 ÷ *SP*, & manebit Medii densitas in *P* ut *OS* ÷ {*OP* × *SP*}. Detur Spiralis, & ob datam rationem *OS* ad *OP*, densitas Medii in *P* erit ut 1 ÷ *SP*. In Medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro *SP*, corpus gyrari potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis *P* ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam *SP*.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia *SP*, est ut *OS* ÷ *OP*, sin distantia illa non datur, ut *OS* ÷ {*OP* × *SP*}. Et inde Spiralis ad

quamlibet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis *P*, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad *OP*. Nam vires illæ sunt ut lineæ *Rr* & *TQ* seu ut $\frac{1}{2}VQ \times PQ \div SQ$ & $PQq. \div SP$ quas simul generant, hoc est, ut $\frac{1}{2}VQ$ & *PQ*, seu $\frac{1}{2}OS$ & *OP*. Data igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta *PS*, inque hac recta corpus descendet ad centrum, dimidia semper cum velocitate qua probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. X. Lib. I.) descensum in Medio non resistente fieri. Unde tempora descensus hic erunt dupla majora temporibus illis atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in Spirali *PQR* atque in recta *SP*, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ *PS* est in data ratione, nempe in ratione *OP* ad *OS*; tempus descensus in Spirali erit ad tempus descensus in recta *SP* in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus describantur duo circuli; numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias complere potest, est ut $PS \div OS$, sive ut Tangens anguli quem Spiralis continet cum radio *PS*; tempus vero revolutionum earundem ut $OP \div OS$, id est reciproce ut Medii densitas.

Figure for Corol. 7.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in Curva quacunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & Radium primum *AS* in eodem angulo secuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in *A* reciproce in dimidiata ratione distantiarum a centro (id est ut *BS* ad mediam proportionalem inter *AS* & *CS*:) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & intersectionibus distinguet Radium *AS* in partes *AS*, *BS*, *CS*, *DS* &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut

Perimetri orbitarum *AEB*, *BFC*, *CGD* &c. directe, & velocitates in principiis *A*, *B*, *C*, inverse; id est ut $AS^{1/2}$, $BS^{1/2}$, $CS^{1/2}$. Atq; tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{1/2}$, $BS^{1/2}$, $CS^{1/2}$ pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{1/2}$; id est ut terminus ille primus $AS^{1/2}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{1/2} - BS^{1/2}$, & quam proxime ut $\frac{2}{3}AS$ ad *AB*. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præterpropter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro *S* intervallis continue proportionalibus *SA*, *SB*, *SC* &c. describe circulos quotcunque, & statue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in Medio de quo egimus, esse ad numerum revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime; Sed & in eadem quoq; ratione esse Tangentem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium *AS*, ad tangentem anguli quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atq; etiam ut sunt eorundem angulorum secantes ita esse tempora revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones eisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

Prop. XVI. Theor. XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut dignitas aliqua distantiæ locorum a centro, sitque vis centripeta reciproce ut distantia in dignitatem illam ducta: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in *P* sit reciproce ut distantiæ *SP* dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n + 1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis *PQ* erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$ & resistentia in *P* ut $Rr \div \{PQq. \times SP^n\}$ sive ut $\frac{1}{2}nVQ \div \{PQ \times SP^n \times SQ\}$, adeoque ut $\frac{1}{2}OS \div \{OP \times SP^{n+1}\}$. Et propterea densitas in *P* est reciproce ut SP^n.

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

Prop. XVII. Prob. V.

Invenire & vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in data Spirali data lege revolvi potest. Vide *Fig. Prop. XV.*

Sit spiralis illa *PQR*. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum *PQ* dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *PSQ* & *QSR*, differentia *RSr*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas Medii.

Prop. XVIII. Prob. VI.

> *Data lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam Spiralem describet.*

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi

perplexis disquisitionibus diutius detenere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECT. V.

De Densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile movetur inter se.

Prop. XIX. Theor. XIII.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita Condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Figure for Prop. XIX.

Cas. 1. In vase sphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes ejusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atq; hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunq; quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique: sit enim *EF* pars sphærica fluidi, & si hæc undiq; non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usq; dum ipsa

undiq; prematur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per casum eundum primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico præterea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed & per Casum secundum, undiq; premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubiq; premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus Sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem Tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idq; in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem in momento temporis absque motu locali; & subinde, partes fluidi, per Casum quintum, se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt nisi, quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

Prop. XX. Theor. XIV.

Si Fluidi Sphœrici, & in œqualibus a centro distantiis homogenei, fundo sphœrico concentrico incumbentis partes singulœ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus Cylindri, cujus basis œqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quœ Fluidi incumbentis.

Figure for
Prop. XX.

Sit *DHM* superficies fundi, & *AEI* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *BFK*, *CGL* distinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *AE* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (per Prop. XIX.) premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione & insuper vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus Orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc est gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (si modo Orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ a centro, ut & ubi Fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in Propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum a superficie pressa sursum continuatum surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad Casus singulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se, si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si Sphæricum est manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idq; sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui, per Cas. 5. Prop. XIX. jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specifice gravius est quam Fluidum sibi contiguum subsidebit, & quod specifice levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, alias in æquilibrio

cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est Gravitas: altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non prægravant, Vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt non vere, quia descendunt in vacuo. Sic & in Aqua, corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum Casuum Demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunq; vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum Figuras externas, patet insuper, per Corollaria Prop. XIX. quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si Animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corporibus immersis, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione ne condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum Systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

Prop. XXI. Theor. XV.

> *Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantiis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod si distantiæ illæ sumantur continue proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continue proportionales.*

Figure for Prop. XXI.

Designet *ATV* fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, *S* centrum, *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. distantias continue proportionales. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, &c. quæ sint ut densitates Medii in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $AH \div AS$, $BI \div BS$, $CK \div CS$, &c. vel, quod perinde est, ut $AH \div AB$, $BI \div BC$, $CK \div CD$ &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab *A* ad *B*, a *B* ad *C*, a *C* ad *D* &c. factis per gradus decrementis in punctis *B*, *C*, *D* &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD* &c. conficient pressiones *AH*, *BI*, *CK*, quibus fundum *ATV* (juxta Theorema XIV.) urgetur. Sustinet ergo particula *A* pressiones omnes *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, pergendo in infinitum; & particula *B* pressiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH*, *BI*; & sic deinceps: adeoque particulæ primæ *A* densitas *AH* est ad particulæ secundæ *B* densitatem *BI* ut summa omnium $AH + BI + CK + DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI + CK + DL$, &c. Et *BI* densitas secundæ *B*, est ad *CK*

densitatem tertiæ *C*, ut summa omnium *BI* + *CK* + *DL*, &c. ad summam omnium *CK* + *DL*, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales per hujus Lem. I. proindeq; differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis *A*, *B*, *C* sint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & (ex æquo) in distantiis *SA*, *SC*, *SE* continue proportionalibus, erunt densitates *AH*, *CK*, *EM* continue proportionales. Et eodem argumento in distantiis quibusvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ* densitates *AH*, *DL*, *QT* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo *A* ad summitatem Fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SQ*, densitates *AH*, *DL*, *QT*, semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Figure for Corol.

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta *A* & *E*, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, Asymptotis rectangulis *SQ*, *SX* describatur Hyperbola secans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ* ad asymptoton *SX* demissa in *h*, *m*, & *t*. Fiat area *ZYmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abscindet lineam *QT* densitati proportionalem. Namque si lineæ *SA*, *SE*, *SQ* sunt continue proportionales, erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XhmY* etiam æquales & lineæ *SX*, *SY*, *SZ* id est *AH*, *EM*, *QT* continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

Prop. XXII. Theor. XVI.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod si

distantiæ sumantur in progressione Musica, densitates Fluidi in his distantiis erunt in progressione Geometrica.

Figure for Prop. XXII.

Designet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* distantias in Progressione Geometrica. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. quæ sint ut Fluidi densitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. & ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt *AH* ÷ *SAq.*, *BI* ÷ *SBq.*, *CK* ÷ *SCq.*, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, secundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D*, &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde est, in distantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum *AH* ÷ *SA*, *BI* ÷ *SB*, *CK* ÷ *SC*, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum *AH* - *BI*, *BI* - *CK*, &c. erunt ut summarum differentiæ *AH* ÷ *SA*, *BI* ÷ *SB*, *CK* ÷ *SC*, &c. Centro *S* Asymptotis *SA*, *SX* describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. in *a*, *b*, *c*; ut & perpendicula ad Asymptoton *SX* demissa *Ht*, *Iu*, *Kw* in *h*, *i*, *k*; & densitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut *AH* ÷ *SA*, *BI* ÷ *SB*, &c. Et rectangula *tu* × *th*, *uw* × *ui*, &c. seu *tp*, *uq*, &c. ut *AH* × *th* ÷ *SA* ut *BI* × *ui* ÷ *SB*, &c. id est ut *Aa*, *Bb* &c. Est enim ex natura Hyperbolæ *SA* ad *AH* vel *St*, ut *th* ad *Aa*, adeoque *AH* × *th* ÷ *SA* æquale *Aa*. Et simili argumento est *BI* × *ui* ÷ *SB* æqualis *Bb*, &c. Sunt autem *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis *Aa* - *Bb*, *Bb* - *Cc*, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula *tp*, *uq*, &c. ut & summis differentiarum *Aa* - *Cc* vel *Aa* - *Dd* summæ rectangulorum *tp* + *uq*, vel *tp* + *uq* + *wr*. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta *Aa* - *Ff*, erit summæ omnium rectangulorum, puta *zthn*, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum *A*, *B*, *C*, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ *zthn*, adeoque huic areæ proportionalis est differentia *Aa* - *Ff*. Sumantur jam distantiæ quælibet, puta *SA*, *SD*, *SF* in Progressione Musica, & differentiæ *Aa* - *Dd*, *Dd* - *Ff* erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter se, & densitates *St*, *Sx*, *Sz*, id est *AH*, *DL*, *FN*, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta *AH* & *CK*,

dabitur area *thkw* harum differentiæ *tw* respondens; & inde invenietur densitas *FN* in altitudine quacunque *SF*, sumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thkw* ut est differentia *Aa* - *Ff* ad differentiam *Aa* - *Cc*.

Scholium.

Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum *SA*, *SB*, *SC*, &c. reciproca (nempe *SA cub.* ÷ *SAq.*, *SA cub.* ÷ *SBq.*, *SA cub.* ÷ *SCq.*) sumantur in progressione Arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta *SA qq.* ÷ *SA cub.*, *SA qq.* ÷ *SB cub.*, *SA qq.* ÷ *SC cub.*) sumantur in progressione Arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica, uti Vir Cl.\ *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ, densitas erit reciproce in sesquiplicata ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

Prop. XXIII. Theor. XVII.

Particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum

Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis. Et vice versa, si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum.

Figure for Prop. XXIII.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico *ACE*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*; & particularum similem situm inter se in utroque spatio obtinentium distantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum *DP* urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum inclusum, ut Medii densitates ad invicem, hoc est *ab cub.* ad *AB cub.* Sed pressio qua quadratum *DB* urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc est ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo ex æquo pressio qua latus *DB* urget Fluidum, est ad pressionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh* per media cuborum ductis distinguatur Fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc est in proportione *ab* ad *AB*: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemq; situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *FGH* in cubo majore, sunt ad vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore ut *ab* ad *AB*, hoc est reciproce ut distantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiæ, id est reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum *DB*, *db* ut summæ virium; & pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et ex æquo pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id est vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si *D* ponatur pro distantia, & *E* pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index est numerus *n*; vires comprimentes erunt ut latera cubica Dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus $n + 2$; & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam nisi forte per particulas intermedias virtute illa auctas exerceant, ex hujusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particulæ cujusq; virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. Ut si particula unaquæq; vi sua, quæ sit reciproce ut distantia locorum a centro suo, fugat alias omnes particulas in infinitum; Vires quibus Fluidum in vasis similibus æqualiter comprimi & condensari possit, erunt ut quadrata diametrorum vasorum: ideoque vis, qua Fluidum in eodem vase comprimitur, erit reciproce ut latus cubicum quadrato-cubi densitatis. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematice demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

SECT. VI.

De Motu & resistentia Corporum Funependulorum.

Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut

longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

Corol. 6. Sed & in Medio non resistente quantitas Materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut supra explicui; adeoque idem præstat in tali Medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis, tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

Prop. XXV. Theor. XIX.

Corpora Funependula quæ in Medio quovis resistuntur in ratione momentorum temporis, quæque in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Figure for Prop. XXV.

Sit *AB* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in *C*, ita ut *C* sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur eadem per datam arcus Cycloidis partem *CO*, & sumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis qua corpus in *d* urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis *Cd* supra resistentiam *CO*,

exponetur per arcum *Od*, adeoque erit ad vim qua corpus *D* urgetur in Medio non resistente, in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde si corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B* & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires ipsis *CD*, *Od* proportionales manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* semper erunt ut arcus toti *CD*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo *D*, *d* simul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in Medio non resistente ad locum *C*, & alterum in Medio resistente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* sint ut arcus *CB* & *OB*; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in Medio non resistente retardatur in *E* est ut *CE*, & vis qua corpus *d* in Medio resistente retardatur in *e* est ut summa vis *Ce* & resistentiæ *CO*, id est ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates in data illa ratione retardatæ manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea si sumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* simul describent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *BE* proportionales sunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ simul describuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum *C*, sed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus descriptus *aB* bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad *a*, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a *B* ad *O*.

Prop. XXVI. Theor. XX.

Corporum Funependulorum, quæ resistuntur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo a centris suspensionum æqualiter distantia,

oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus auferantur, conferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. *Q. E. D.*

Prop. XXVII. Theor. XXI.

Si corpora Funependula resistuntur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales *A*, *B*; resistentia corporis in arcu *A*, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus *B*, in duplicata ratione velocitatum, id est ut *A quad.* ad *B quad.* quamproxime. Si resistentia in arcu *B* esset ad resistentiam in arcu *A* ut rectangulum *AB* ad *A quad.* tempora in arcubus *A* & *B* forent æqualia per Propositionem superiorem. Ideoque resistentia *A quad.* in arcu *A*, vel *AB* in arcu *B*, efficit excessum temporis in arcu *A* supra tempus in Medio non resistente; & resistentia *BB* efficit excessum temporis in arcu *B* supra tempus in Medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes *AB* & *BB* quam proxime, id est ut arcus *A* & *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in Medio resistente in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente. Nam si verbi gratia arcus sit altero duplo major, differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in

Medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in Medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistentia in descensu corporis qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistentia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corpora tardescentia paulo minus resistuntur pro ratione velocitatis, & corpora accelerata paulo magis quam quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producitur.

Prop. XXVIII. Theor. XXII.

Si corpus Funependulum in Cycloide oscillans resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet *BC* arcum descensu descriptum, *Ca* arcum ascensu descriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & stantibus quæ in Propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis *D*, ad uim resistentia ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio seu puncto altissimo, id est vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

Prop. XXIX. Prob. VII.

Posito quod corpus in Cycloide oscillans resistitur in duplicata

ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Figure for Prop. XXIX.

Sit *Ba* (*Fig. Prop. XXV.*) arcus oscillatione integra descriptus, sitque *C* infimum Cycloidis punctum, & *CZ* semissis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O*, *C*, *P*, *Q* ea lege ut (si erigantur perpendicula *OK*, *CT*, *PI*, *QE*, centroque *O* & Asymptotis *OK*, *OQ* describatur Hyperbola *TIGE* secans perpendicula *CT*, *PI*, *QE* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *KF* occurrens Asymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *CT* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area Hyperbolica *PIEQ* ad aream Hyperbolicam *PITC* ut arcus *BC* descensu corporis descriptus ad arcum *Ca* ascensu descriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OC*. Dein perpendiculo *MN* abscindatur area Hyperbolica *PINM* quæ sit ad aream Hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* descensu descriptum. Et si perpendiculo *RG* abscindatur area Hyperbolica *PIGR*, quæ sit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* descensu toto descriptum: erit resistentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\{OR \div OQ\}$ *IEF* - *IGH* ad aream *PIENM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, sint ut arcus *CZ*, *CB*, *CD*, *Ca*, & arcus illi sint ut areæ *PINM*, *PIEQ*, *PIGR*, *PITC*; exponatur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper *Dd* spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG*, *rg* comprehensam; & producatur *rg* ad *h*, ut sint *GHhg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH*, *PIGR* decrementa. Et areæ $\{OR \div OQ\}$ *IEF* - *IGH* incrementum *GHhg* - $\{Rr \div OQ\}$ *IEF*, seu $Rr \times HG$ - $\{Rr \div OQ\}$ *IEF*, erit ad areæ *PIGR* decrementum *RGgr* seu $Rr \times RG$, ut *HG* - $\{IEF \div OQ\}$ ad *RG*; adeoque ut $OR \times HG$ - $\{OR \div OQ\}$ *IEF* ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$: hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, *ORHK* - *OPIK*, *PIHR* & *PIGR* + *IGH*) ut *PIGR* + *IGH* - $\{OR \div OQ\}$ *IEF* ad *OPIK*. Igitur si area $\{OR \div OQ\}$ *IEF* - *IGH* dicatur *Y*, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ *Y* ut *PIGR* - *Y*.

Quod si *V* designet vim a gravitate oriundam arcui describendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*; & *R* pro resistentia ponatur: erit *V* - *R* vis tota qua corpus urgetur in *D*, adeoque ut

incrementum velocitatis in data temporis particula factum. Est autem resistentia *R* (per Hypothesin) ut quadratum velocitatis, & inde (per Lem. II.) incrementum resistentiæ ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est ut spatium data temporis particula descriptum & *V* - *R* conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut *V* - *R*; id est, si pro vi *V* scribatur ejus exponens *PIGR*, & resistentia *R* exponatur per aliam aliquam aream *Z*, ut *PIGR* - *Z*.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area *Y* in ratione *PIGR* - *Y*, & area *Z* in ratione *PIGR* - *Z*. Et propterea si areæ *Y* & *Z* simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia *Z* augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum *C*, resistentia citius evanescet quam area *Y*. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area *Z* incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus *CD*, *CD* arcubus *CB* & *Ca* æquantur, adeoque ubi recta *RG* incidit in rectas *QE* & *CT*. Et area *Y* seu {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* - *IGH* incipit desinitque ubi nulla est, adeoque ubi {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* & *IGH* æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta *RG* incidit in rectam *QE* & *CT*. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area {*OR* ÷ *OQ*} *IEF* - *IGH* æqualis est areæ *Z*, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area {*OP* ÷ *OQ*} *IEF* ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* est ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum *PIGR* - *Y*) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in dimidiata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide absque omni resistentia

oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

Prop. XXX. Theor. XXIII.

Si recta aB *æqualis sit Cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ, quamproxime.*

Figure for Prop. XXX.

Exponatur enim tum Cycloidis arcus oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem *aB*, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem *AB*. Bisecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* secundum Tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli; & si in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit *DK* exponens resistentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* construatur semicirculus, *BEeA*. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, de circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaq; hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; sitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in Medio resistente. Et si centro *C* & intervallo *CF* describatur circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam si *Fg*

designet velocitatis momentum quod corpus *D*, describendo spatium quam minimum *Dd*, ex resistentia Medii amittit, & sumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & *MN* erit decrementum ascensus ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *fg* a resistentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum *fma* vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob similia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, est *fm* ad *Fm* seu *Dd*, ut *CD* ad *DF*, & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fg* ad *Fh* ut *CF* ad *DF*; & ex æquo perturbate *Fh* seu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF*. Sumatur *DR* ad ½*aB* ut *DK* ad *CF*, & erit *MN* ad *Dd* ut *DR* ad ½*aB*; ideoque summa omnium *MN* × ½*aB*, id est *Aa* × ½*aB*, æqualis erit summæ omnium *Dd* × *DR*, id est areæ *BRrSa*, quam rectangula omnia *Dd* × *DR* seu *DRrd* componunt. Bisecentur *Aa* & *aB* in *P* & *O*, & erit ½*aB* seu *OB* æqualis *CP*, ideoque *DR* est ad *DK* ut *CP* ad *CF* vel *CM*, & divisim *KR* ad *DR* ut *PM* ad *CP*. Ideoque cum punctum *M*, ubi corpus versatur in medio oscillationis loco *O*, incidat circiter in punctum *P*, & priore oscillationis parte versetur inter *A* & *P*, posteriore autem inter *P* & *a*, utroque in casu æqualiter a puncto *P* in partes contrarias errans: punctum *K* circa medium oscillationis locum, id est e regione puncti *O*, puta in *V*, incidet in punctum *R*; in priore autem oscillationis parte jacebit inter *R* & *E*, & in posteriore inter *R* & *D*, utroque in casu æqualiter a puncto *R* in partes contrarias errans. Proinde area quam linea *KR* describit, priore oscillationis parte jacebit extra aream *BRSa*, posteriore intra eandem, idque dimensionibus hinc inde propemodum æquatis inter se; & propterea in casu priore addita areæ *BRSa*, in posteriore eidem subducta, relinquet aream *BKTa* areæ *BRSa* æqualem quam proxime. Ergo rectangulum *Aa* × ½*aB* seu *AaO*, cum sit æquale areæ *BRSa*, erit etiam æquale areæ *BKTa* quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum *Ca*, *CB* differentia *Aa*, colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam si uniformis sit resistentia *DK*, figura *aBKkT* rectangulum erit sub *Ba* & *DK*, & inde rectangulum sub ½*Ba* & *Aa* æqualis erit rectangulo sub *Ba* & *DK*, & *DK* æqualis erit ½*Aa*. Quare cum *DK* sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut ½*Aa* ad longitudinem Penduli; omnino ut in Propositione XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura *aBKkT* Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem *BA*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *AB* descripti ordinatim applicata *DE*. Proinde cum *Ba* in Medio resistente & *BA* in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates in singulis ipsius *Ba* punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis *BA*, ut est *Ba* ad *BA*; erit velocitas *DK* in Medio resistente ut circuli vel Ellipseos super diametro *Ba* descripti ordinatim applicata; adeoque figura *BKVTa* Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit *OV* exponens resistentiæ in puncto Medio *O*; & Ellipsis, centro *O*, semiaxibus *OB*, *OV* descripta, figuram *aBKVT*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quam proxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est *Aa* ad *OV* ut area semicirculi, ad quadratum radii sive ut 11 and 7 circiter: Et propterea: $^{7}/_{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in *O* ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia *DK* sit in duplicata ratione velocitatis, figura *BKTVa* Parabola erit verticem habens *V* & axem *OV*, ideoque æqualis erit duabus tertiis partibus rectanguli sub *Ba* & *OV* quam proxime. Est igitur rectangulum sub ½*Ba* & *Aa* æquale rectangulo sub ⅔*Ba* & *OV*, adeoque *OV* æqualis ¾*Aa*, & propterea corporis oscillantis resistentia in *O* ad ipsius gravitatem ut ¾*Aa* ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc si ad partem alterutram *BKV* vel *VTa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime.

Prop. XXXI. Theor. XXIV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione quamproxime.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta ½*aB* & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa*, æqualis erat areæ *BKT*. Et area illa, si maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc est in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo *aB* & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub *Aa* & ½*aB* est ut *aB* & resistentia conjunctim, & propterea *Aa* ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius; & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius; & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata; & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi resistentiæ hujus pro longitudine arcus descripti, habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

SECT. VII.

De Motu Fluidorum & resistentia Projectilium.

Prop. XXXII. Theor. XXV.

Si corporum Systemata duo ex æquali particularum numero constent & particulæ correspondentes similes sint, singulæ in uno Systemate singulis in altero, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particulæ ille pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri; & contra.

Corpora similia temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incæptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut

correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1. 2, & 7. Prop. IV. si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter Systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se, donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum densitates ad invicem ut densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum Systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque Systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque adeo spatia diametris suis proportionalia describere.

Prop. XXXIII. Theor. XXVI.

> *Iisdem positis, dico quod Systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.*

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium

inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter eorum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcunque projiciantur; vires autem motrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistitur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, projectile resisteretur in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis

E, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in dimidiata ratione virium *T* ad vires *V*; resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E,* & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G* in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eadem ratione quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elastico velocissime moventis eadem fere est resistentia ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo Fluidi vis Elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in Medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum, sunt etiam æquivelocium & celerrime moventium corporum resistentiæ in Fluido Elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; sive Fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistentia projectilium celerrime motorum non

multum diminuitur.

Corol. 6. Cum autem particulæ Fluidorum, propter vires quibus se mutuo fugiunt, moveri nequeant quin simul agitent particulas alias in circuitu, atque adeo difficilius moveantur inter se quam si viribus istis destituerentur; & quo majores sint earum vires centrifugæ, eo difficilius moveantur inter se: manifestum esse videtur quod projectile in tali Fluido eo difficilius movebitur, quo vires illæ sunt intensiores; & propterea si corporis velocissimi in superioribus Corollariis velocitas diminuatur, quoniam resistentia diminueretur in duplicata ratione velocitatis, si modo vires particularum in eadem ratione duplicata diminuerentur; vires autem nullatenus diminuantur, manifestum est quod resistentia diminuetur in ratione minore quam duplicata velocitatis.

Corol. 7. Porro cum vires centrifugæ eo nomine ad augendam resistentiam conducant, quod particulæ motus suos per Fluidum ad majorem a se distantiam per vires illas propagent; & cum distantia illa minorem habeat rationem ad majora corpora: manifestum est quod augmentum resistentiæ ex viribus illis oriundum in corporibus majoribus minoris sit momenti; & propterea, quo corpora sint majora eo magis accurate resistentia tardescentium decrescet in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 8. Unde etiam ratio illa duplicata magis accurate obtinebit in Fluidis quæ, pari densitate & vi Elastica, ex particulis minoribus constant. Nam si corpora illa majora diminuantur, & particulæ Fluidi, manente ejus densitate & vi Elastica, diminuantur in eadem ratione; manebit eadem ratio resistentiæ quæ prius: ut ex præcedentibus facile colligitur.

Corol. 9. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis Elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar Lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in superioribus Corollariis.

Prop. XXXIV. Theor. XXVII.

Quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata

sunt, obtinent ubi particulæ Systematum se mutuo contingunt, si modo particulæ illæ sint summe lubricæ.

Concipe particulas viribus quibusdam se mutuo fugere, & vires illas in accessu ad superficies particularum augeri in infinitum, & contra, in recessu ab iisdem celerrime diminui & statim evanescere. Concipe etiam systemata comprimi, ita ut partes eorum se mutuo contingant, nisi quatenus vires illæ contactum impediunt. Sint autem spatia per quæ vires particularum diffunduntur quam angustissima, ita ut particulæ se mutuo quam proxime contingant: & motus particularum inter se iidem erunt quam proxime ac si se mutuo contingerent. Eadem facilitate labentur inter se ac si essent summe lubricæ, & si impingant in se mutuo reflectentur ab invicem ope virium præfatarum, perinde ac si essent Elasticæ. Itaque motus erunt iidem in utroque casu, nisi quatenus perexigua particularum sese non contingentium intervalla diversitatem efficiant: quæ quidem diversitas diminuendo particularum intervalla diminui potest in infinitum. Jam vero quæ in præcedentibus duabus Propositionibus demonstrata sunt, obtinent in particulis sese non contingentibus, idque licet intervalla particularum, diminuendo spatia per quæ vires diffunduntur, diminuantur in infinitum. Et propterea eadem obtinent in particulis sese contingentibus, exceptis solum differentiis quæ tandem differentiis quibusvis datis minores evadant. Dico igitur quod accurate obtinent. Si negas, assigna differentiam in casu quocunque. Atqui jam probatum est quod differentia minor sit quam data quævis. Ergo differentia falso assignatur, & propterea nulla est. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si Systematum duorum partes omnes quiescant inter se, exceptis duabus, quæ cæteris majores sint & sibi mutuo correspondeant inter cæteras similiter sitæ. Hæ secundum lineas similiter positas utcunque projectæ similes excitabunt motus in Systematibus, & temporibus proportionalibus pergent spatia similia & diametris suis proportionalia describere; & resistentur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis Systematum.

Corol. 2. Unde si Systemata illa sint Fluida duo similia, & eorum partes duæ majores sint corpora in iisdem projecta: sint autem Fluidorum particulæ summe lubricæ, & quoad magnitudinem & densitatem proportionales corporibus: pergent corpora temporibus proportionalibus spatia similia & diametris suis proportionalia

describere, & resistentur in ratione Corollario superiore definita.

Corol. 3. Proinde in eodem Fluido Projectile magnitudine datum resistitur in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 4. At si particulæ Fluidi non sint summe lubricæ, vel si viribus quibuscunque se mutuo agitant, quibus motuum libertas diminuitur: Projectilia tardiora difficilius superabunt resistentiam, & propterea magis resistentur quam in velocitatis ratione duplicata.

Prop. XXXV. Theor. XXVIII.

Si Globus & Cylindrus æqualibus diametris descripti, in Medio raro & Elastico, secundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate celerrime moveantur: erit resistentia Globi duplo minor quam resistentia Cylindri.

Figure for Prop. XXXV.

Nam quoniam resistentia (per Corol. 3. Prop. XXXIII.) eadem est quam proxime ac si partes Fluidi viribus nullis se mutuo fugerent, supponamus partes Fluidi ejusmodi viribus destitutas per spatia omnia uniformiter dispergi. Et quoniam actio Medii in corpus eadem est (per Legum Corol. 5.) sive corpus in Medio quiescente moveatur, sive Medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Designet igitur *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, secundum rectas ipsi *AC* parallelas: Sitque *FB* ejusmodi recta. In ea capiatur *LB* semidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ Sphæram tangat in *B*. In *AC* & *BD* demittantur perpendiculares *BE*, *DL*, & vis qua particula Medii, secundum rectam *FB* oblique incidendo, Globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa Globum descriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam *FB* vel *AC*, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundum plagam determinationis suæ, id est secundum plagam rectæ *BC* qua globum directe urget, ut *BE* ad *BC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in globum

secundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem secundum plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare si ad cylindri basem circularem *NAO* erigatur perpendiculum *bHE*, & sit *bE* æqualis radio *AC*, & *bH* æqualis *BE quad.* ÷ *CB*, erit *bH* ad *bE* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea Solidum quod a rectis omnibus *bH* occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus *bE* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed solidum prius est Parabolois vertice *V*, axe *CA* & latere recto *CA* descriptum, & solidum posterius est cylindrus Paraboloidi circumscriptus: & notum est quod Parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota Medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ Medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

Figure for Scholium.

Eadem methodo figuræ aliæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in Mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *OC* describitur, & altitudine *OD*, construendum sit frustum coni *CBGF*, quod omnium eadem basi & altitudine constructorum & secundum plagam axis sui versus *D* progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem *OD* in *Q* & produc, *OQ* ad *S* ut sit *QS* æqualis *QC*, & erit *S* vertex coni cujus frustum quæritur.

Unde obiter cum angulus *CSB* semper sit acutus, consequens est, quod si solidum *ADBE* convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis *ADBE* circa axem *AB* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eadem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135: solidum, quod convolutione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *CB* generatur,

minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui *AB* progrediatur, & utriusque terminus *B* præcedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.

Figure for Scholium.

Quod si figura *DNFB* ejusmodi sit ut, si ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum secet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad 4*BR* × *GBq.*: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta describitur, in Medio raro & Elastico ab *A* versus *B* velocissime movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.

Prop. XXXVI. Prob. VIII.

Invenire resistentiam corporis Sphærici in Fluido raro & Elastico velocissime progredientis. (Vide Fig. Pag. 325.)

Designet *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum. Producatur *CA* primo ad *S* deinde ad *R*, ut sit *AS* pars tertia ipsius *CA*, & *CR* sit ad *CS* ut densitas corporis Sphærici ad densitatem Medii. Ad *CR* erigantur perpendicula *PC*, *RX*, centroque *R* & Asymptotis *CR*, *RX* describatur Hyperbola quævis *PVY*. In *CR* capiatur *CT* longitudinis cujusvis, & erigatur perpendiculum *TV* abscindens aream Hyperbolicam *PCTV*, & sit *CZ* latus hujus areæ applicatæ ad rectam *PC*. Dico quod motus quem globus, describendo spatium *CZ*, ex resistentia Medii amittet, erit ad ejus motum totum sub initio ut longitudo *CT* ad longitudinem *CR* quamproxime.

Nam (per motuum Legem tertiam) motus quem cylindrus *GNOQ* circa globum descriptus impingendo in Medii particulas amitteret, æqualis est motui quem imprimeret in easdem particulas. Ponamus quod particulæ singulæ reflectantur a cylindro, & ab eodem ea cum velocitate resiliant, quacum cylindrus ad ipsas accedebat. Nam talis erit reflexio, per Legum Corol. 3. si modo particulæ quam minime sint, & vi Elastica quam maxima reflectantur. Velocitas igitur quacum a cylindro resiliunt, addita velocitati cylindri componet

totam velocitatem duplo majorem quam velocitas cylindri, & propterea motus quem cylindrus ex reflexione particulæ cujusque amittit, erit ad motum totum cylindri, ut particula duplicata ad cylindrum. Proinde cum densitas Medii sit ad densitatem cylindri ut *CS* ad *CR*; si *Ct* sit longitudo tempore quam minimo a cylindro descripta, erit motus eo tempore amissus ad motum totum cylindri ut $2Ct \times CS$ ad $AI \times CR$. Ea enim est ratio materiæ Medii, a cylindro protrusæ & reflexæ, ad massam cylindri. Unde cum globus sit duæ tertiæ partes cylindri, & resistentia globi (per Propositionem superiorem) sit duplo minor quam resistentia cylindri: erit motus, quem globus describendo longitudinem *L* amittit, ad motum totum globi, ut $Ct \times CS$ ad $\frac{2}{3}AI \times CR$, sive ut *Ct* ad *CR*. Erigatur perpendiculum *tv* Hyperbolæ occurrens in *v*, & (per Corol. 1. Prop. V. Lib. II.) si corpus describendo longitudinem areæ *CtvP* proportionalem, amittit motus sui totius *CR* partem quamvis *Ct*, idem describendo longitudinem areæ *CTVP* proportionalem, amittet motus sui partem *CT*. Sed longitudo *Ct* æqualis est $CPvt \div CP$, & longitudo *CZ* (per Hypothesin) æqualis est $CPTV \div CP$, adeoque longitudo *Ct* est ad longitudinem *CZ* ut area *CPvt* ad aream *CPVT*. Et propterea cum globus describendo longitudinem quam minimam *Ct* amittat motus sui partem, quæ sit ad totum ut *Ct* ad *CR*, is describendo longitudinem aliam quamvis *CZ*, amittet motus sui partem quæ sit ad totum ut *CT* ad *CR*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si detur corporis velocitas sub initio, dabitur tempus quo corpus, describendo spatium *Ct*, amittet motus sui partem *Ct*: & inde, dicendo quod resistentia sit ad vim gravitatis ut ista motus pars amissa ad motum, quem gravitas Globi eodem tempore generaret; dabitur proportio resistentiæ ad gravitatem Globi.

Corol. 2. Quoniam in his determinandis supposui quod particulæ Fluidi per vim suam Elasticam quam maxime a Globo reflectantur, & particularum sic reflexarum impetus in Globum duplo major sit quam si non reflecterentur: manifestum est quod in Fluido, cujus particulæ vi omni Elastica aliaque omni vi reflexiva destituuntur, corpus Sphæricum resistentiam duplo minorem patietur; adeoque eandem velocitatis partem amittendo, duplo longius progredietur quam pro constructione Problematis hujus superius allata.

Corol. 3. Et si particularum vis reflexiva neque maxima sit neque omnino nulla, sed mediocrem aliquam rationem teneat: resistentia

pariter, inter limites in constructione Problematis & Corollario superiore positos, mediocrem rationem tenebit.

Corol. 4. Cum corpora tarda paulo magis resistantur quam pro ratione duplicata velocitatis: hæc describendo longitudinem quamvis *CZ* amittent majorem motus sui partem, quam quæ sit ad motum suum totum ut *CT* ad *CR*.

Corol. 5. Cognita autem resistentia corporum celerrimorum, innotescet etiam resistentia tardorum; si modo lex decrementi resistentiæ pro ratione velocitatis inveniri potest.

Prop. XXXVII. Prob. IX.

Aquæ de vase dato per foramen effluentis definire motum.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur ut aqua per foramen defluat, manifestum est quod vas sustinebit pondus aquæ totius, dempto pondere partis illius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam si foramen obstaculo aliquo occluderetur, obstaculum sustineret pondus aquæ sibi perpendiculariter incumbentis, & fundum vasis sustineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obstaculo, fundum vasis eadem aquæ pressione eodemve ipsius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obstaculum sustinebat, cum jam non sustineatur, faciet ut aqua descendat & per foramen defluat.

Unde consequens est, quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare possit. Nam aquæ particula unaquæque pondere suo, quatenus non impeditur, descendit, idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur, urgebit obstaculum. Obstaculum illud vel vasis est fundum, vel aqua inferior defluens; & propterea ponderis pars illa, quam vasis fundum non sustinet, urgebit aquam defluentem & motum sibi proportionalem generabit.

Designet igitur *F* aream foraminis, *A* altitudinem aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, *P* pondus ejus, *AF* quantitatem ejus, *S* spatium quod dato quovis tempore *T* in vacuo libere cadendo describeret, & *V* velocitatem quam in fine temporis illius cadendo acquisierit: & motus ejus acquisitus $AF \times V$ æqualis erit motui aquæ totius eodem tempore effluentis. Sit velocitas quacum effluendo exit

de foramine, ad velocitatem V ut d ad e; & cum aqua velocitate V describere posset spatium $2S$, aqua effluens eodem tempore, velocitate sua $\{d \div e\}V$ describere posset spatium $\{2d \div e\}S$. Et propterea columna aquæ cujus longitudo sit $\{2d \div e\}S$ & latitudo eadem quæ foraminis, posset eo tempore defluendo egredi de vase, hoc est columna $\{2d \div e\}SF$. Quare motus $\{2dd \div ee\}SFV$, qui fiet ducendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem suam, hoc est motus omnis tempore effluxus illius genitus, æquabitur motui $AF \times V$. Et si æquales illi motus applicentur ad FV; fiet $\{2dd \div ee\}S$ æqualis A. Unde est dd ad ee ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione $\frac{1}{2}A$ ad S. Est igitur velocitas quacum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo describens spatium S acquireret, ut altitudo aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & spatium illud S, quod corpus tempore T cadendo describeret.

Igitur si motus illi sursum vertantur; quoniam aqua velocitate V ascenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat; & altitudines (uti notum est) sint in duplicata ratione velocitatum: aqua effluens ascenderet ad altitudinem $\frac{1}{2}A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis; quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem $\frac{1}{2}A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini perpendiculariter imminentis.

Cum autem aqua effluens, motu suo sursum verso, perpendiculariter surgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis; consequens est quod si egrediatur oblique per canalem in latus vasis, describet in spatiis non resistentibus Parabolam cujus latus rectum est altitudo aquæ in vase supra canalis orificium, & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinatim applicatæ parallelæ sunt axi canalis.

Hæc omnia de Fluido subtilissimo intelligenda sunt. Nam si aqua ex partibus crassioribus constet, hæc tardius effluet quam pro ratione superius assignata, præsertim si foramen angustum sit per quod effluit.

Denique si aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur; quoniam fundum vasis integrum est, & eadem aquæ incumbentis pressione ubique urgetur ac si aqua non efflueret; vas sustinebit

pondus aquæ totius, non obstante effluxu, sed latus vasis de quo effluit non sustinebit pressionem illam omnem, quam sustineret si aqua non efflueret. Tolletur enim pressio partis illius ubi perforatur: quæ quidem pressio æqualis est ponderi columnæ aquæ, cujus basis foramini æquatur & altitudo eadem est quæ aquæ totius supra foramen. Et propterea si vas, ad modum corporis penduli, filo prælongo a clavo suspendatur, hoc, si aqua in plagam quamvis secundum lineam horizontalem effluit, recedet semper a perpendiculo in plagam contrariam. Et par est ratio motus pilarum, quæ Pulvere tormentario madefacto implentur, &, materia in flammam per foramen paulatim expirante, recedunt a regione flammæ & in partem contrariam cum impetu feruntur.

Prop. XXXVIII. Theor. XXIX.

Corporum Sphæricorum in Mediis quibusque Fluidissimis resistentiam in anteriore superficie definire.

Figure for Prop. XXXVIII.

Defluat aqua de vase Cylindrico *ABCD*, per canalem Cylindricum *EFGH*, in vas inferius *IKLM*; & inde effluat per vasis marginem *IM*. Sit autem margo ille ejusdem altitudinis cum vasis superioris fundo *CD*, eo ut aqua per totum canalem uniformi cum motu descendat; & in medio canalis collocetur Globus *P*, sitque *PR* altitudo aquæ supra Globum, & *SR* ejusdem altitudo supra fundum vasis. Sustineatur autem Globus filo tenuissimo *TV*, lateribus canalis hinc inde affixo. Et manifestum est per proportionem superiorem, quod quantitas aquæ dato tempore defluentis erit ut amplitudo foraminis per quod defluit; hoc est, si Globus tollatur, ut canalis orificium: sin Globus adsit, ut spatium undique inter Globum & canalem. Nam velocitas aquæ defluentis (per superiorem Propositionem) ea erit quam corpus cadendo, & casu suo describendo dimidiam aquæ altitudinem *SR*, acquirere posset: adeoque eadem est sive Globus tollatur, sive adsit. Et propterea aqua defluens erit ut amplitudo spatii per quod transit. Certe transitus aquæ per spatium angustius facilior esse nequit quam per spatium amplius, & propterea velocitas ejus ubi Globus adest, non potest esse major quam cum tollitur: ideoque major aquæ quantitas, ubi Globus adest, non effluet quam pro ratione spatii per

quod transit. Si aqua non sit liquor subtilissimus & fluidissimus, hujus transitus per spatium angustius, ob crassitudinem particularum, erit aliquanto tardior: at liquorem fluidissimum esse hic supponimus. Igitur quantitas aquæ, cujus descensum Globus dato tempore impedit, est ad quantitatem aquæ quæ, si Globus tolleretur, eodem tempore descenderet, ut basis Cylindri circa Globum descripti ad orificium canalis; sive ut quadratum diametri Globi ad quadratum diametri cavitatis canalis. Et propterea quantitas aquæ cujus descensum Globus impedit, æqualis est quantitati aquæ, quæ eodem tempore per foramen circulare in fundo vasis, basi Cylindri illius æquale, descendere posset, & cujus descensus per fundi partem quamvis circularem basi illi æqualem impeditur.

Jam vero pondus aquæ, quod vas & Globus conjunctim sustinent, est pondus aquæ totius in vase, præter partem illam quæ aquam defluentem accelerat, & ad ejus motum generandum sufficit, quæque, per Propositionem superiorem, æqualis est ponderi columnæ aquæ cujus basis æquatur spatio inter Globum & canalem per quod aqua defluit, & altitudo eadem cum altitudine aquæ supra fundum vasis, per lineam *SR* designata. Vasis igitur fundum & Globus conjunctim sustinent pondus aquæ totius in vase sibi ipsis perpendiculariter imminentis. Unde cum fundum vasis sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminentis, reliquum est ut Globus etiam sustineat pondus aquæ sibi perpendiculariter imminentis. Globus quidem non sustinet pondus aquæ illius stagnantis & sibi absque omni motu incumbentis, sed aquæ defluenti resistendo impedit effectum tanti ponderis; adeoque vim aquæ defluentis sustinet ponderi illi æqualem. Nam impedit descensum & effluxum quantitatis aquæ quem pondus illud accurate efficeret si Globus tolleretur. Aqua pondere suo, quatenus descensus ejus impeditur, urget obstaculum omne, ideoque obstaculum, quatenus descensum aquæ impedit, vim sustinet æqualem ponderi quo descensus ille efficeretur. Globus autem descensum quantitatis aquæ impedit, quem pondus columnæ aquæ sibi perpendiculariter incumbentis efficere posset; & propterea vim aquæ decurrentis sustinet ponderi illi æqualem. Actio & reactio aquæ per motus Legem tertiam æquantur inter se, & in plagas contrarias diriguntur. Actio Globi in aquam descendentem, ad ejus descensum impediendum, in superiora dirigitur, & est ut descendendi motus impeditus, eique tollendo adæquate sufficit: & propterea actio contraria aquæ in Globum æqualis est vi quæ motum eundem vel

tollere vel generare possit, hoc est ponderi columnæ aquæ, quæ Globo perpendiculariter imminet & cujus altitudo est *RS*.

Si jam canalis orificium superius obstruatur, sic ut aqua descendere nequeat, Globus quidem, pondere aquæ in canali & vase inferiore *IKLM* stagnantis, premetur undique; sed non obstante pressione illa, si ejusdem sit specificæ gravitatis cum aqua, quiescet. Pressio illa Globum nullam in partem impellet. Et propterea ubi canalis aperitur & aqua de vase superiore descendit, vis omnis, qua Globus impellitur deorsum, orietur ab aquæ illius descensu, atque adeo æqualis erit ponderi columnæ aquæ, cujus altitudo est *RS* & diameter eadem quæ Globi. Pondus autem istud, quo tempore data quælibet aquæ quantitas, per foramen basi Cylindri circa Globum descripti æquale, sublato Globo effluere posset, sufficit ad ejus motum omnem generandum; atque adeo quo tempore aqua in Cylindro uniformiter decurrendo describit duas tertias partes diametri Globi, sufficit ad motum omnem aquæ Globo æqualis generandum. Nam Cylindrus aquæ, latitudine Globi & duabus tertiis partibus altitudinis descriptus, Globo æquatur. Et propterea aquæ currentis impetus in Globum quiescentem, quo tempore aqua currendo describit duas tertias partes diametri Globi, si uniformiter continuetur, generaret motum omnem partis Fluidi quæ Globo æquatur.

Quæ vero de aqua in canali demonstrata sunt, intelligenda sunt etiam de aqua quacunque fluente, qua Globus quilibet in ea quiescens urgetur. Quæque de aqua demonstrata sunt obtinent etiam in Fluidis universis subtilissimis. De his omnibus idem valet argumentum.

Jam vero per Legum Corol. 5, vis Fluidi in Globum eadem est, sive Globus quiescat & Fluidum uniformi cum velocitate moveatur, sive Fluidum quiescat & Globus eadem cum velocitate in partem contrariam pergat. Et propterea resistentia Globi in Medio quocunque Fluidissimo uniformiter progredientis, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ describit, æqualis est vi, quæ in corpus ejusdem magnitudinis cum Globo & ejusdem densitatis cum Medio uniformiter impressa, quo tempore Globus duas tertias partes diametri suæ progrediendo describit, velocitatem Globi in corpore illo generare posset. Tanta est resistentia Globi in superficiei parte præcedente. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si solidum Sphæricum in ejusdem secum densitatis Fluido subtilissimo libere moveatur, & inter movendum eadem vi urgeatur a tergo atque cum quiescit; ejusdem resistentia ea erit quam in Corollario secundo Propositionis xxxvi. descripsimus. Unde si computus ineatur, patebit quod solidum dimidiam motus sui partem prius amittet, quam progrediendo descripserit longitudinem diametri propriæ; Quod si inter movendum minus urgeatur a tergo, magis retardabitur: & contra, si magis urgeatur, minus retardabitur.

Corol. 2. Hallucinantur igitur qui credunt resistentiam projectilium per infinitam divisionem partium Fluidi in infinitum diminui. Si Fluidum sit valde crassum, minuetur resistentia aliquantulum per divisionem partium ejus. At postquam competentem Fluiditatis gradum acquisiverit, (qualis forte est Fluiditas Aeris vel aquæ vel argenti vivi) resistentia in anteriore superficie solidi, per ulteriorem partium divisionem non multum minuetur. Nunquam enim minor futura est quam pro limite quem in Corollario superiore assignavimus.

Corol. 3. Media igitur in quibus corpora projectilia sine sensibili motus diminutione longissime progrediuntur, non solum Fluidissima sunt, sed etiam longe rariora quam sunt corpora illa quæ in ipsis moventur: nisi forte quis dixerit Medium omne Fluidissimum, impetu perpetuo in posticam projectilis partem facto, tantum promovere motum ejus quantum impedit & resistit in parte antica. Et motus quidem illius, quem projectile imprimit in Medium, partem aliquam a Medio circulariter lato reddi corpori a tergo verisimile est. Nam & experimentis quibusdam factis, reperi quod in Fluidis satis compressis pars aliqua redditur. Omnem vero in casu quocunque reddi nec rationi consentaneum videtur, neque cum experimentis hactenus a me tentatis bene quadrat. Fluidorum enim utcunque subtilium, si densa sint, vim ad solida movenda resistendaque permagnam esse, & quomodo vis illius quantitas per experimenta determinetur, plenius patebit per Propositiones duas quæ sequuntur.

Lemma IV.

Si vas Sphœricum Fluido homogeneo quiescente plenum a vi impressa moveatur in directum, motuque progessivo semper accelerato ita pergat ut interea non moveatur in orbem: partes Fluidi inclusi, œqualiter participando motum vasis, quiescent

inter se. Idem obtinebit in vase figuræ cujuscunque. Res manifesta est, nec indiget demonstratione.

Prop. XXXIX. Theor. XXX.

Fluidum omne quod motu accelerato ad modum venti increbescentis progreditur, & cujus partes inter se quiescunt, rapit omnia ejusdem densitatis innatantia corpora, & secum cum eadem velocitate defert.

Nam per Lemma superius si vas Sphæricum, rigidum, Fluidoque homogeneo quiescente plenum, motu paulatim impresso progrediatur; Fluidi motum vasis participantis partis omnes semper quiescent inter se. Ergo si Fluidi partes aliquæ congelarentur, pergerent hæ quiescere inter partes reliquas. Nam quoniam partes omnes quiescunt inter se, perinde est sive fluidæ sint, sive aliquæ earum rigescant. Ergo si vas a vi aliqua extrinsecus impressa moveatur, & motum suum imprimat in Fluidum; Fluidum quoque motum suum imprimet in sui ipsius partes congelatas easque secum rapiet. Sed partes illæ congelatæ sunt corpora solida ejusdem densitates cum Fluido; & par est ratio Fluidi, sive id in vase moto claudatur, sive in spatiis liberis ad modum venti spiret. Ergo Fluidum omne quod motu progressivo accelerato fertur, & cujus partes inter se quiescunt, solida quæcunque ejusdem densitatis inclusa, quæ sub initio quiescebant, rapit secum, & una moveri cogit. *Q. E. D.*

Prop. XL. Prob. X.

Invenire resistentiam solidorum Sphæricorum in Mediis Fluidissimis densitate datis.

In Fluido quocunque dato inveniatur resistentia ultima solidi specie dati, cujus magnitudo in infinitum augetur. Dein dic: ut ejus motus amissus, quo tempore progrediendo longitudinem semidiametri suæ describit, est ad ejus motum totum sub initio, ita motus quem solidum quodvis datum, in Fluido eodem jam facto subtilissimo, describendo diametri suæ longitudinem amitteret, est ad ejus motum totum sub initio quamproxime. Nam si particulæ minimæ Fluidi subtiliati eandem habeant proportionem eundemque situm ad solidum datum in eo movens, quem particulæ totidem minimæ Fluidi

non subtiliati habent ad solidum auctum; sintque particulæ Fluidi utriusq; summe lubricæ, & viribus centrifugis centripetisque omnino destituantur; incipiant autem solida temporibus quibuscunque proportionalibus in his Fluidis similiter moveri: pergent eadem similiter moveri, adeoque quo tempore describunt spatia semidiametris suis æqualia, amittent partes motuum proportionales totis; idque licet partes Medii subtiliati minuantur, & magnitudo solidi in Medio non subtiliato moventis augeatur in infinitum. Ergo ex resistentia solidi aucti in Medio non subtiliato, dabitur per proportionem superiorem resistentia solidi non aucti in Medio subtiliato. *Q. E. I.*

Si particulæ non sunt summe lubricæ, supponendum est quod in utroq; Fluido sunt æqualiter lubricæ, eo ut ex defectu lubricitatis resistentia utrinq; æqualiter augeatur: & Propositio etiamnum valebit.

Corol. 1. Ergo si ex aucta solidi Sphærici magnitudine augeatur ejus resistentia in ratione duplicata, resistentia solidi Sphærici dati ex diminuta magnitudine particularum Fluidi, nullatenus minuetur.

Corol. 2. Sin resistentia, augendo solidum Sphæricum, augeatur in minore quam duplicata ratione diametri; eadem diminuendo particulas Fluidi, diminuetur in ratione qua resistentia aucta deficit a ratione duplicata diametri.

Corol. 3. Unde perspicuum est quod solidi dati resistentia per divisionem partium Fluidi non multum diminui potest. Nam resistentia solidi aucti debebit esse quam proxime ut quantitas materiæ fluidæ resistentis, quam solidum illud movendo protrudit & a locis a se invasis & occupatis propellit: hoc est ut spatium Cylindricum per quod solidum movetur, adeoque in duplicata ratione semidiametri solidi quamproxime.

Corol. 4. Igitur propositis duobus Fluidis, quorum alterum ab altero quoad vim resistendi longissime superatur: Fluidum quod minus resistit est altero rarius; suntque Fluidorum omnium vires resistendi prope ut eorum densitates; præsertim si solida sint magna, & velociter moveantur, & Fluidorum æqualis sit compressio.

Scholium Generale.

Quæ hactenus demonstrata sunt tentavi in hunc modum. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57^{7}/_{22}$, diametro digitorum *Londinensium* 6⅞ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & centrum oscillationis Globi distantia esset pedum 10½. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus Globus quartam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione prima, ex descensu & ascensu subsequente composita, arcum digitorum fere quatuor; idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor, amisit octavam motus partem oscillationibus 121; ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum 3½. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor, amisit octavam motus partem oscillationibus 69, 35½, 18½, 9⅔, respective. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum ¼, ½, 1, 2, 4, 8 respective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque; & in oscillatione una mediocri, qua arcus digitorum 3¾, 7½, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $^{1}/_{656}$, $^{1}/_{242}$, $^{1}/_{69}$, $^{4}/_{71}$, $^{8}/_{37}$, $^{24}/_{29}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime; in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione, & propterea (per Corol. 2. Prop. xxxi. Libri hujus) resistentia Globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quamproxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione: omnino ut in Corollariis Propositionis xxxii. demonstratum est.

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV + BV^{3/2} + CV^{2}$. Et cum velocitates maximæ in prædictis sex

Casibus, sint ut arcuum dimidiorum 1⅞, 3¾, 7½, 15, 30, 60 chordæ, atque adeo ut arcus ipsi quamproxime, hoc est ut numeri ½, 1, 2, 4, 8, 16: scribamus in Casu secundo quarto & sexto numeros 1, 4, & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $^1/_{242}$ æqualis $A + B + C$ in Casu secundo; & $2 \div 35½$ æqualis $4A + 8B + 16C$ in casu quarto; & $8 \div 9⅔$ æqualis $16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Unde si per has æquationes determinemus quantitates A, B, C; habebimus Regulam inveniendi differentiam arcuum pro velocitate quacunque data.

Cæterum cum velocitates maximæ sint in Cycloide ut arcus oscillando descripti, in circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcubus majores sint in Cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo sint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca: ut ex resistentia in circulo inveniatur resistentia in Trochoide, debebit resistentia augeri in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui in ratione chordæ ad arcum, ob tempus (seu durationem resistentiæ qua arcuum differentia prædicta generatur) diminutum in eadem ratione: id est (si rationes conjungamus) debebit resistentia augeri in ratione arcus ad chordam circiter. Hæc ratio in casu secundo est 6283 ad 6279, in quarto 12566 ad 12533, in sexto 25132 ad 24869. Et inde resistentia $1 \div 242$, $2 \div 35½$, & $8 \div 9⅔$ evadunt $6283 \div \{6279 \times 242\}$, $25132 \div \{12533 \times 35½\}$ & $201056 \div \{24869 \times 9⅔\}$, id est in numeris decimalibus 0,004135, 0,056486 & 0,8363. Unde prodeunt æquationes $A + B + C = 0,004135$: $4A + 8B + 16C = 0,05648$ & $16A + 64B + 256C = 0,8363$. Et ex his per debitam terminorum collationem & reductionem Analyticam fit $A = 0,0002097$, $B = 0,0008955$ & $C = 0,0030298$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0002097V + 0,0008955V^{3/2} + 0,0030298V^2$: & propterea cum per Corol. Prop. xxx. resistentia Globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $^7/_{11}AV + ^{16}/_{23}BV^{3/2} + ¾CV^2$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B, & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0001334V + 0,000623V^{3/2} + 0,00227235V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut 0.003029 ad 121, in quarto ut 0.042875 ad 121, in sexto ut 0.63013 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in Casu sexto descripsit, erat $120 - \{8 \div 9\frac{2}{3}\}$ seu $119\,^{5}/_{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat $124\,^{3}/_{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima ob resistentiam Aeris non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\,^{3}/_{62}$; idque in Cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius Sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum $62\,^{3}/_{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Unde cum corpus tempore minuti unius secundi cadendo (uti per experimenta pendulorum determinavit *Hugenius*) describat pedes *Parisienses* $15\,^{1}/_{12}$, id est pedes *Anglicos* $16\,^{11}/_{24}$ seu digitos 197½, & tempora sint in dimidiata ratione spatiorum; Globus tempore minut. $16^{\text{tert.}}$ $38^{\text{quart.}}$ cadendo describet 15,278 digitos, & velocitatem suam prædictam acquiret; & propterea cum eadem velocitate uniformiter continuata describet eodem tempore longitudinem duplam 30,556 digitorum. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,63013 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,58172 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus ut 0,58172 ad 213,4, id est ut 1 ad $366\,^{5}/_{6}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem pedum 30,556, velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $366\,^{5}/_{6}$, hoc est velocitatis totius partem $1 \div 366\,^{5}/_{6}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ seu

digitorum $3^7/_{16}$ describere posset, eodem amitteret motus sui partem $^1/_{3262}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descensus Primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	1½	3	6	12	24	48
Num. Oscillat.	374	272	162½	83⅓	41⅔	22⅔

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum duorum & pondere unciarum Romanarum 26¼ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum 10½, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	⅞	$^7/_4$	3½	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	90½	53	30
Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	¾	1½	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per

quantitatem V ut supra: emerget in observatione prima $^2/_{193} = A + B + C$, in secunda $2 \div 90½ = 4A + 8B + 16C$, in tertia $^8/_{30}$ æqu. $16A + 64B + 256C$. Quæ æquationes per reductiones superius expositas dant, $A = 0{,}000145$, $B = 0{,}000247$ & $C = 0{,}0009$. Et inde prodit resistentia Globi cum velocitate V moventis, in ea ratione ad pondus suum unciarum 26¼, quam habet $0{,}000923V + 0{,}000172V^{3/2} + 0{,}000675V^2$ ad Penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0{,}000675V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57^7/_{22}$ ut $0{,}00227235V^2$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57^7/_{22}$ in 0,00227235 ad 26¼ in 0,000675, id est ut 130309 ad 17719 seu 7⅓ ad 1. Diametri Globorum duorum erant 6⅞ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut 47¼ & 4, seu $11^{13}/_{16}$ & 1 quamproxime. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa resistentia subduci debet. Hanc accurate definire non potui, sed majorem tamen inveni quam partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli, & inde didici quod resistentiæ Globorum, dempta fili resistentia, sunt quamproxime in dimidiata ratione diametrorum. Nam ratio 7⅓ - ⅓ ad 1 - ⅓, id est 7 ad ⅔ seu 10½ ad 1, non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11^{13}/_{16}$ ad 1.

Cum resistentia fili in Globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat 18¼ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum 122¾ inter punctum suspensionis & nodum in filo 109½ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus, 32 dig. arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus, 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus, 30 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri $^2/_5$ dig. Ut radius 109½ ad radium 122½, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a Nodo descriptus, ad arcum totum 67⅛, oscillatione mediocri a centro Globi descriptum: & ita differentia $^2/_5$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augeretur in ratione 126 ad

$122\frac{1}{2}$, velocitas ejus diminueretur in ratione illa dimidiata; & arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0,4475 diminueretur in ratione velocitatis, adeoque evaderet 0,4412. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $67\frac{1}{8}$ ad $124\frac{3}{31}$, differentia ista 0,4412 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque, evaderet 1,509. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia Penduli esset in duplicata ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1,509 dig. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 313,9. Rursus ubi pendulum superius ex Globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptorum fuit $\frac{126}{121}$ in $8 \div 9\frac{2}{3}$ seu $\frac{25}{29}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 48,55. Duxi autem differentias hasce in pondera Globorum ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 313,9 & 48,55. Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,58172 ad 0,63013, id est ut 44,4 ad 48,55; & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti, adeoque partes illæ sunt ut 313,9 & 44,4 quamproxime, id est ut 7,07 ad 1. Sunt autem Globorum diametri $10\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{1}{2}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est ut Globorum resistentiæ 7,07 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est quam quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt (paribus Globis) ut quadrata velocitatum, sunt etiam (paribus velocitatibus) ut quadrata diametrorum Globorum; & propterea (per Corollaria Prop. XL. Libri hujus) resistentia quam Globi majores & velociores in aere movendo sentiunt, haud multum per infinitam aeris divisionem & subtiliationem diminui potest, proindeque Media omnia in quibus corpora multo minus resistuntur, sunt aere rariora.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque

(cum demonstratio vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro 3⅝ digitorum, movebatur ut in Tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum 134⅛ digitorum.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus digitorum.	64	32	16	8	4	2	1	½	¼
Arcus ascensu ultimo descriptus digitorum.	48	24	12	6	3	1½	¾	⅜	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum.	16	8	4	2	1	½	¼	⅛	$\frac{1}{16}$
Numerus oscillationum in aqua.		$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	11¼	12⅔	13⅓	
Numerus	85½		287	535					

oscillationum
in
aere.

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1^1/_5$ in aqua amissi sunt. Erant autem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua, nimirum in ratione 44 ad 41. Nam 14⅔ oscillationes in aqua, & 13⅔ in aere simul peragebantur. Et propterea si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, numerus oscillationum $1^1/_5$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur (ob resistentiam auctam in ratione illa duplicata & tempus diminutum in ratione eadem simplici) diminueretur in eadem illa ratione 44 ad 41, adeoque evaderet $1^1/_5$ in $^{41}/_{44}$ seu $^{123}/_{110}$. Paribus igitur Pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $^{123}/_{110}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $^{123}/_{110}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in Casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ resistentiam Globi in aere cum velocitate V moventis, & cum velocitas maxima, in Casu columnæ, quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ ut 1 ad 8, & resistentia in Casu columnæ quartæ ad resistentiam in Casu columnæ primæ in ratione arcuum differentiæ in his casibus, ad numeros oscillationum applicatæ, id est ut $^2/_{535}$ ad $16 \div 85½$ seu ut 85½ ad 4280: scribamus in his Casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque 85½ & 4280 pro resistentiis, & fiet $A + C = 85½$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$, indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449½$ & $C = 64^3/_{14}$ & $A = 21^2/_7$; atque adeo resistentia ut $21^2/_7 V + 64^3/_{14} V^2$ quamproxime. Quare in Casu columnæ quartæ ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $21^2/_7 + 64^3/_{14}$ seu 85½, ad $64^3/_{14}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut 85½ ad $64^3/_{14}$ & 535 ad $^{123}/_{110}$ conjunctim, id est ut 637 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius,

eadem cum velocitate in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc est ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod Arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediebat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur, resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam construendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in Aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabula sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	½	¼
Arcus ascensu ultimo descriptus.	12	6	3	1½	¾	⅜	$^3/_{16}$
Arcuum diff. motui amisso proportionalis	4	2	1	½	¼	⅛	$^1/_{16}$
Numerus Oscillationum	3⅜	6½	$12^1/_{12}$	$21^1/_5$	34	53	$62^1/_5$

Resistentia hic nunquam augetur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Et idem in pendulo majore evenire verisimile est, si modo Arca augeatur in ratione penduli. Debebit tamen resistentia tam in aere quam in aqua, si velocitas per gradus in infinitum augeatur, augeri tandem in ratione paulo plusquam duplicata, propterea quod in experimentis hic descriptis resistentia minor est quam pro ratione de corporibus velocissimis in Libri hujus Prop. xxxvi & xxxviii. demonstrata. Nam corpora longe velocissima spatium a tergo

relinquent vacuum, ideoque resistentia quam sentiunt in partibus præcedentibus, nullatenus minuetur per pressionem Medii in partibus posticis.

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime supra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque successive oscillante invenirem proportionem resistentiarum: & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi ½ vel ⅔ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in ea ratione ad resistentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immersi. Ampliato Globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quamproxime. Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora pari densitate proculdubio magis resistunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus vini. Verum in liquoribus qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in aqua seu dulci seu falsa, in Spiritibus vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fœcibus per destillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam Fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Quare cum Globus aqueus in aere movendo resistentiam patiatur qua motus sui pars $^{1}/_{3261}$, interea dum longitudinem semidiametri suæ describat (ut jam ante ostensum est) tollatur, sitque densitas aeris ad

densitatem aquæ ut 800 vel 850 ad 1 circiter, consequens est ut hæc Regula generaliter obtineat. Si corpus quodlibet Sphæricum in Medio quocunque satis Fluido moveatur, & spectetur resistentiæ pars illa sola quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc pars erit ad vim quæ totum corporis motum, interea dum corpus idem longitudinem duarum ipsius semidiametrorum motu illo uniformiter continuato describat, vel tollere posset vel eundem generare, ut densitas Medii ad densitatem corporis quamproxime. Igitur resistentia quasi triplo major est quam pro lege in Corollario primo Propositionis xxxviii. allata; & propterea partes quasi duæ tertiæ motus illius omnis quem Globi partes anticæ movendo imprimunt in Medium, restituuntur in Globi partes posticas a Medio in orbem redeunte, inque spatium irruente quod Globus alias vacuum post se relinqueret. Unde si velocitas Globi eousque augeatur ut Medium non posset adeo celeriter in spatium illud irruere, quin aliquid vacui a tergo Globi semper relinquatur, resistentia tandem evadet quasi triplo major quam pro Regula generali novissime posita.

Hactenus experimentis usi sumus oscillantium pendulorum, eo quod eorum motus facilius & accuratius observari & mensurari possint. Motus autem pendulorum in gyrum actorum & in orbem redeundo circulos describentium, propterea quod sint uniformes & eo nomine ad investigandam resistentiam datæ velocitati competentem longe aptiores videantur, in consilium etiam adhibui. Faciendo enim ut pendulum circulariter latum duodecies revolveretur, notavi magnitudines circulorum duorum, quos prima & ultima revolutione descripsit. Et inde collegi velocitates corporis sub initio & fine. Tum dicendo quod corpus, velocitate mediocri describendo circulos duodecim mediocres, amitteret velocitatum illarum differentiam, collegi resistentiam qua differentia illa eo omni corporis per circulos duodecim itinere amitti posset; & resistentia inventa, quanquam hujus generis experimenta minus accurate tentare licuit, probe tamen cum præcedentibus congruebat.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis hujus opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi

experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante Pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget.) Huic ponderi addebam pondus aeris quam pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis Metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum distracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacui, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quæ resistuntur: erit $78B$ resistentia pyxidis

plenæ in ipsius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ resistentia tota $A + B$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $A + 78B$ ut 77 ad 78, & divisim $A + B$ ad $77B$ ut 77, ad 1, indeque $A + B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ oriatur ab actione Fluidi alicujus subtilis in Metallum inclusum. Ac causam longe aliam esse opinor. Nam tempora oscillationum pyxidis plenæ minora sunt quam tempora oscillationum pyxidis vacuæ, & propterea resistentia pyxidis plenæ in externa superficie major est, pro ipsius velocitate & longitudine spatii oscillando descripti, quam ea pyxidis vacuæ. Quod cum ita sit, resistentia pyxidum in partibus internis aut nulla erit aut plane insensibilis.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

Eadem methodo qua invenimus resistentiam corporum Sphæricorum in Aqua & argento vivo, inveniri potest resistentia corporum figurarum aliarum; & sic Navium figuræ variæ in Typis exiguis constructæ inter se conferri, ut quænam ad navigandum aptissimæ sint, sumptibus parvis tentetur.

SECT. VIII.

De Motu per Fluida propagato.

Prop. XLI. Theor. XXXI.

Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

Figure for
Prop. XLI.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*

Corol. Si pressionis a dato puncto per Fluidum propagatæ pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum *defg*, reactione frusti secundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in superficie *fg*, quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur *degf* inter Conum *Ade* & frustum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus *de*, *fg* conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non sit, sed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam frustum *fghi* eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in spatia *NO*, *KL* hinc inde, quam

propagatur a superficie *fg* versus *PQ*.   *Q. E. D.*

Figure for Corol. and Prop. XLII.

Prop. XLII. Theor. XXXII.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque (si fieri potest) in spatio conico *BCQP*, secundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in Fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde versus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in Fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipsæ ab *A* versus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.*   Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus a puncto *A* per Medium Elasticum successive propagatos. Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima Sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*, dilatabit sese tam versus spatia illa *KL*, *NO* utrinque sita, quam

versus pulsuum rariora intervalla; eoq; pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem celeritate sese in Medii partes quiescentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque spatium totum *KLON* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in sonis, qui vel domo interposita audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non reflexi a parietibus oppositis sed a fenestra directe propagati.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio ista non fit nisi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur Fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* transiit, dilatari incipiet, & abinde tanquam a principio & centro in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

Prop. XLIII. Theor. XXXIII.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in Medio vero non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hasce Medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes

reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. *Q. E. D.* Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centrocommuni, secundum superficies propemodum Sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in Undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis Elasticæ.

Quod si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est ad partes quæ corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum, sed in circulum eundo pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit, & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in Orbem ad partes quæ eidem cedunt.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem per Medium ambiens secundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione

sola partium flammæ sed a totius dilatatione derivari.

Prop. XLIV. Theor. XXXIV.

> *Si Aqua in canalis cruribus erectis* KL, MN *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis œquetur semissi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

Figure for Prop. XLIV.

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando. Designent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure *KL* ascendit ad altitudinem *EF*, descenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum suspensionis, *SPQR* Cyclois quam Pendulum describat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque ubi aqua in crure *KL* ascendit ad *EF*, & in crure altero descendit ad *GH*, vis illa est pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea est ad pondus aquæ totius ut *AE* seu *PQ* ad *VP* seu *PR*. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in Cycloide, est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia *PQ* a loco infimo *P*, ad Cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia *AE*, *PQ* describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque vires illæ, si aqua & pendulum in principio, æquali cum velocitate moveantur; pergent eadem temporibus æqualiter movere, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt Isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6^1/_9$, aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3^1/_{18}$ longitudinis, tempore minuti

unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione dimidiata.

Prop. XLV. Theor. XXXV.

Undarum velocitas est in dimidiata ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

Prop. XLVI. Prob. XI.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam quæ vel vallibus imis vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem, sintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc infimæ sunt, mox fiant altissimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima *A*, *C*, *E*, & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini, partes altissimæ *A*, *C*, *E* tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum Undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est Unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* $3^1/_{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient;

adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes 183⅓, & horæ spatio pedes 11000 quamproxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in dimidiata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

Prop. XLVII. Theor. XXXVI.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex dimidiata ratione vis Elasticæ directe & dimidiata ratione densitatis inverse; si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo; & in eadem

ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione dimidiata materiæ & ratione dimidiata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si Medii vel densitas vel vis Elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in dimidiata ratione densitatis, ac diminuetur in dimidiata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione dimidiata densitatis Medii inverse & ratione dimidiata vis Elasticæ directe. *Q. E. D.*

Prop. XLVIII. Theor. XXXVII.

Pulsibus per Fluidum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.

Figure for Prop. XLVIII.

Figure for Prop. XLVIII.

Designent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria Physica Medii quiescentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee*, *Ff*, *Gg*, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas Physicas seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca εφ, φγ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* describatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum

partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, si demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *Ee* æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Physicum *E* reperiatur in ε. Hac lege punctum quodvis *E* eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E* iisdem accelerationis ac retardationis gradibus, vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulsuum intervallum totum *BC*. Et demissis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus similibus successive agitantur, si *PH* vel *PHSk* sit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel *PHSi* tempus ab initio motus puncti *F*, & *PK* vel *PHSh* tempus ab initio motus puncti *G*; & propterea *E*ε, *F*φ, *G*γ erunt ipsis *PL*, *PM*, *PN* in itu punctorum, vel ipsis *Pn*, *Pm*, *Pl* in punctorum reditu, æquales respective. Unde εγ in itu punctorum æqualis erit *EG* - *LN*, in reditu autem æqualis *EG* + *ln*. Sed εγ latitudo est seu expansio partis Medii *EG* in loco εγ, & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut *EG* - *LN* ad *EG*; in reditu autem ut *EG* + *ln* seu *EG* + *LN* ad *EG*. Quare cum sit *LN* ad *KH* ut *IM* ad radium *OP*, & *EG* ad *BC* ut *HK* ad circumferentiam *PHShP*, & vicissim *EG* ad *HK* ut *BC* ad circumferentiam *PHShP*, id est (si circumferentia dicatur *Z*) ut $OP \times BC \div Z$ ad *OP*, & ex æquo *LN* ad *EG* ut *IM* ad $OP \times BC \div Z$: erit expansio partis *EG* in loco εγ ad expansionem mediocrem quam habet in loco suo primo *EG*, ut $\{OP \times BC \div Z\} - IM$ ad $OP \times BC \div Z$ in itu, utque $\{OP \times BC \div Z\} + im$ ad $OP \times BC \div Z$ in reditu. Unde si $OP \times BC \div Z$ dicatur *V*, erit expansio partis *EG*, punctive Physici *F*, ad ejus expansionem mediocrem in itu, ut $V - IM$ ad *V*, in reditu ut $V + im$ ad *V*; & ejusdem vis elastica ad vim suam elasticam mediocrem in itu, ut $1 \div \{V - IM\}$ ad $1 \div V$; in reditu, ut $1 \div \{V + im\}$ ad $1 \div V$. Et eodem argumento vires Elasticæ punctorum Physicorum *E* & *G* in itu, sunt ut $1 \div \{V - HL\}$ & $1 \div \{V - KN\}$ ad $1 \div V$; & virium differentia ad Medii vim elasticam mediocrem, ut

$$\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL} \quad \text{ad} \quad \frac{1}{V}.$$

$\times$ *KN*

Hoc est (si ob brevitatem pulsuum supponamus *HK* & *KN* indefinite minores esse quantitate *V*) ut $\{HL - KN\} \div VV$ ad $1 \div V$, sive ut *HL* - *KN* ad *V*. Quare cum quantitas *V* detur, differentia virium est ut *HL* - *KN*, hoc est (ob proportionales *HL* - *KN* ad *HK*, & *OM* ad *OI* vel *OP*, datasque *HK* & *OP*) ut *OM*; id est, si *Ff* bisecetur in Ω, ut Ωφ. Et eodem argumento differentia virium Elasticarum punctorum Physicorum ε & γ, in reditu lineolæ Physicæ εγ est ut Ωφ. Sed differentia illa (id est excessus vis Elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ,) est vis qua interjecta Medii lineola Physica εγ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Physicæ εγ est ut ipsius distantia a Medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum *PI*; & Medii pars linearis εγ lege præscripta movetur, id est lege oscillantis Penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola Physica εγ, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

Prop. XLIX. Prob. XII.

Datis Medii densitate & vi Elastica, invenire velocitatem pulsuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris nostri comprimi, sitque *A* altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit *A*: & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio *A* descripti æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione superiore constructa sunt, si linea

quævis Physica, *EF* singulis vibrationibus describendo spatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis *P* & *S*, a vi Elastica quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus Perimeter tota longitudini *PS* æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in dimidiata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est *A*, in dimidiata ratione longitudinis ½*PS* seu *PO* ad longitudinem *A*. Sed vis Elastica qua lineola Physica *EG*, in locis suis extremis *P*, *S* existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis superioris) ad ejus vim totam Elasticam ut *HL* - *KN* ad *V*, hoc est (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut *HK* ad *V*: & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, qua lineola *EG* comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo *A* ad lineolæ longitudinem *EG*; adeoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis suis *P* & *S* urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in dimidiata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elastica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$, atque adeo ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est *A*, in dimidiata ratione $V \times EG$ ad $HK \times A$ & *PO* ad *A* conjunctim; id est (cùm fuerit, in superiore Propositione, *V* æqualis $PO \times BC \div Z$, & *HK* æqualis $EG \times Z \div BC$) in dimidiata ratione *PO qu.* $\times$ *BC* $\times$ *EG* $\div$ *Z* ad *EG* $\times$ *Z* $\times$ *A qu.* $\div$ *BC* seu *PO qu.* $\times$ *BC qu.* ad *Z qu.* $\times$ *A qu.* hoc est in ratione $PO \times BC$ ad $Z \times A$, seu *BC* ad $Z \times A \div PO$. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam *BC*. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium *BC*, est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut *BC* ad $Z \times A \div PO$, id est ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius est *A*. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium *BC*, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Prop. L. Prob. XIII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Schol.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola (per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quàm aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modò vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi *Mercurius* in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 850 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11617. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis, cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 348500 digitorum seu pedum *Anglicorum* 29042. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus *A*. Circuli radio 29042 pedum descripti circumferentia est pedum 182476. Et cum Pendulum digitos $39^1/_5$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; pendulum pedes 29042, seu digitos 348500, longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $188^4/_7$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 182476, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 968. Scribit *Mersennus*, in Balisticæ suæ Prop. XXXV. se factis experimentis invenisse quod sonus minutis quinque secundis hexapedas *Gallicas* 1150 (id est pedes *Gallicos* 6900) percurrat. Unde cum pes *Gallicus* sit ad *Anglicum* ut 1068 ad 1000, debebit sonus tempore minuti unius secundi pedes *Anglicos* 1474 conficere. Scribit etiam idem *Mersennus*

Robervallum Geometram clarissimum in Obsidione *Theodonis* observasse tormentorum fragorem exauditum esse post 13 vel 14 ab igne viso minuta secunda, cùm tamen vix dimidiam *Leucam* ab illis Tormentis abfuerit. Continet *Leuca Gallica* hexapedas 2500, adeoque sonus tempore 13 vel 14 secundorum, ex Observatione *Robervalli*, confecit pedes *Parisienses* 7500, ac tempore minuti unius secundi pedes *Parisienses* 560, *Anglicos* verò 600 circiter. Multum differunt hæ Observationes ab invicem, & computus noster medium locum tenet. In porticu Collegii nostri pedes 208 longa, sonus in termino alterutro excitatus quaterno recursu Echo quadruplicem efficit. Factis autem experimentis inveni quod singulis soni recursibus pendulum quasi sex vel septem digitorum longitudinis oscillabatur, ad priorem soni recursum eundo & ad posteriorem redeundo. Longitudinem penduli satis accuratè definire nequibam: sed longitudine quatuor digitorum, oscillationes nimis celeres esse, ea novem digitorum nimis tardas judicabam. Unde sonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quàm pendulum digitorum novem, & majore quàm pendulum digitorum quatuor oscillatur; id est minore tempore quàm $28\frac{3}{4}$ minutorum tertiorum, & majore quàm $19^1/_6$; & propterea tempore minuti unius secundi conficit pedes *Anglicos* plures quàm 866 & pauciores quàm 1272, atque adeò velocior est quàm pro Observatione *Robervalli,* ac tardior quàm pro Observatione *Mersenni*. Quinetiam accuratioribus postea Observationibus definivi quod longitudo penduli major esse deberet quàm digitorum quinque cum semisse, & minor quàm digitorum octo; adeoque quòd sonus tempore minuti unius secundi confecit pedes *Anglicos* plures quàm 920 & pauciores quàm 1085. Igitur motus sonorum, secundum calculum Geometricum superius allatum, inter hos limites consistens, quadrat cum Phænomenis, quatenus hactenus tentare licuit. Proinde cùm motus iste pendeat ab aeris totius densitate, consequens est quod soni non in motu ætheris vel aeris cujusdam subtilioris, sed in aeris totius agitatione consistat.

Refragari videntur experimenta quædam de sono in vasis aere vacuis propagato, sed vasa aere omni evacuari vix possunt; & ubi satis evacuantur soni notabiliter imminui solent; *Ex. gr.* Si aeris totius pars tantùm centesima in vase maneat, debebit sonus esse centuplo languidior, atque adeò non minus audiri quàm si quis sonum eundem in aere libero excitatum audiendo, subinde ad decuplam distantiam à corpore sonoro recederet. Conferenda sunt igitur corpora duo

æqualiter sonora, quorum alterum in vase evacuato, alterum in aere libero consistat, & quorum distantiæ ab auditore sint in dimidiata ratione densitatum aeris: & si sonus corporis prioris non superat sonum posterioris objectio cessabit.

Cognita sonorum velocitate, innotescunt etiam intervalla pulsuum. Scribit *Mersennus* (Lib. I. Harmonicorum Prop. IV.) se (factis experimentis quibusdam quæ ibidem describit) invenisse quod nervus tensus vicibus 104 recurrit spatio minuti unius secundi, quando facit Unisonum cum organica Fistula quadrupedali aperta vel bipedali obturata, quam vocant Organarii *C fa ut*. Sunt igitur pulsus 104 in spatio pedum 968, quos sonus tempore minuti secundi describit: adeoque pulsus unus occupat spatium pedum 9¼ circiter; id est duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est quòd latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porrò cur Soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutiùs audiuntur ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quàm cum proximè absumus, patet ex Corollario Propositionis XLVIII. Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis Stenterophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impedientibus tardiùs amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECT. IX.

De motu Circulari Fluidorum.

Hypothesis.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

Prop. LI. Theor. XXXVIII.

Si Cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in Orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.

Figure for Prop. LI.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor, ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impressio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit prout in eandem regionem cum ipsius motu, vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est inversè ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ

translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est (conjunctis rationibus) ut quadrata distantiarum inversè. Quare si ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt summæ distantiarum, hoc est motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est, si ad constituendum Medium uniformiter fluidum orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his summis Analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. & tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut distantia *SD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe Cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineantur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter, communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec

prius desinet augeri quàm fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare, & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecùs impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aqua profunda stagnante experiri licet.

Prop. LII. Theor. XXXIX.

> *Si Sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphæræ.* Fig. Prop. LI.

Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuò factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quàm ex parte convexa, prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc est inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inversè.

Quare si ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ distantiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis *DIO* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directè ut quadratum distantiæ *SD*. Id quod volui primò demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuò superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectà pergens movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est, neque adeò motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui à centro æqualiter distant, vel citiùs revolverentur vel tardiùs juxta polos quàm juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut priùs. His sectionibus annuli omnes quamminimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut

mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quàm ad polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur, ne materia quæ ad Eclipticam est recedat semper à centro & per exteriora Vorticis migret ad polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quàm tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione perpetuò communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui planè invariatam; patet quod motus perpetuò transfertur à centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eò quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum à quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat quam imprimit in materiam vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in

vorticem: & primò revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latiùs serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuò ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuò paulatim excurrent; globiq; per actiones vorticum in se mutuò, perpetuò movebuntur de locis suis; uti in Lemmate superiore expositum est; neq; certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si Fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintq; eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum à centro vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, Fluidum inclusum & globus servent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo

perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone tempus revolutionis hujus esse ad summam hujus temporis & temporis revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunq; moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neq; prius desinent fluidum & vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8. 9 & 10 definiti, nec in alio unquam statu quocunq; perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur Systema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neq; motus suos in se mutuò per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquantur inter se, & Systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & æquales, ad æquales semper à se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior &

separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minùs fluida est magis cohærebit & segnior erit, adeoq; motum tardiùs recipiet & longiùs propagabit quàm pro ratione superiùs assignata. Si figura vasis non sit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quamproximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores; neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo à spatiis angustioribus in latiora recedent paulò longiùs à centro, sed isto recessu tardescent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio Vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione Phænomena cœlestia per Vortices explicari possint. Nam Phænomenon est quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquialtera distantiarum à centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utrisque quam accuratissimè, quatenus observationes Astronomicæ hactenus prodidêre. Ideoq; si Planetæ illi à Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum à centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquialteram reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat à centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quàm ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi

consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi Demonstrationum gratia Hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. Quo concesso tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quàm duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celeriùs moveantur prope centrum, dein tardiùs usque ad certum limitem, tum denuò celeriùs juxta circumferentiam; certè nec ratio sesquialtera neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaq; Philosophi quo pacto Phænomenon illud rationis sesquialteræ per Vortices explicari possit.

Prop. LIII. Theor. XL.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neq; quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum fit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proximè ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere à centro Vorticis quàm priùs; adeoq; Vorticis vim illam, qua priùs in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet à centro & revolvendo describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum

partibus fluidi à centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro Vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Figure for Scholium.

Hinc liquet Planetas à Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardiùs movebitur in Aphelio *B* & velociùs in Perihelio *C*, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velociùs moveri debeat quàm in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hac Materia cœlesti relativè quiescens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, & in principio Piscium minor quàm

minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. Itaq; Hypothesis Vorticum cum Phænomenis Astronomicis omninò pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis absque Vorticibus peraguntur intelligi potest ex Libro primo, & in Mundi Systemate pleniùs docebitur.

De Mundi Systemate

LIBER TERTIUS

In Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, ij vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent quibus à multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ Lectoribus etiam Mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, author esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulò legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

HYPOTHESES.

Hypoth. I. *Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & vera sint & earum Phœnomenis explicandis sufficiunt.*

Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

Hypoth. II. *Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ.*

Uti respirationis in Homine & in Bestia; descensus lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terra & in Planetis.

Hypoth. III. *Corpus omne in alterius cujuscunque generis corpus transformari posse, & qualitatum gradus omnes intermedios sucessivè induere.*

Hypoth. IV. *Centrum Systematis Mundani quiescere.*

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram alii Solem in centro quiescere contendat.

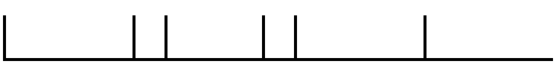
Hypoth. V. *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquialtera distantiarum ab ipsius centro.*

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in sesquialtera semidiametrorum orbium consentiunt Astronomici: & *Flamstedius*, qui omnia Micrometro & per Eclipses Satellitum accuratius definivit, literis ad me datis, quinetiam numeris suis mecum communicatis, significavit rationem illam sesquialteram tam accuratè obtinere, quàm sit possibile sensu deprehendere. Id quòd ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum tempora periodica.

1d. 18h. $28'\frac{3}{5}$. 3d. 13h. $17'\frac{9}{10}$. 7d. 3h. $59'\frac{3}{5}$. 16d. 18h. $5'\frac{1}{5}$.

Distantiæ Satellitum à centro Jovis.



Ex Observationibus Cassini	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Borelli	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Townlei *per Micromet.*	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Flamstedii *per Microm.*	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Flamst. *per Eclips. Satel.*	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Ex temporibus periodicis.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Semidiam. Jovis.

Hypoth. VI. *Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

Hypoth. VII. *Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquialtera mediocrium distantiarum à Sole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemq; orbium dimensiones, sive Planetæ circa Terram, sive iidem circa Solem revolvantur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissimè ex Observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter à distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula sequente videre licet.

Planetarum ac Telluris Distantiæ mediocres à Sole.

	[illegible]
Secundum *Keplerum*	[illegible]
Secundum *Bullialdum*	[illegible]
Secundum tempora periodica	[illegible]

De distantiis Mercurii & Veneris à Sole disputandi non est locus, cum

hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De distantiis etiam superiorum Planetarum à Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

Hypoth. VIII. *Planetas primarios radiis ad Terram ductis areas describere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.*

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprimè demonstratur per Eclipses Satellitum, quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & distantias à Sole determinari diximus.

Hypoth. IX. *Lunam radio ad centrum terræ ducto aream tempori proportionalem describere.*

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias Physicis in hisce Hypothesibus negligo.

Prop. I. Theor. I.

> *Vires, quibus Planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.*

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. V. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. V. & Corol. 6. Prop. IV. ejusdem Libri.

Prop. II. Theor. II.

> *Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse*

reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Hypoth. VIII. & Prop. II. Lib. I. & pars posterior per Hypoth. VII. & Prop. IV. ejusdem Libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

Prop. III. Theor. III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe suo respicere terram, & esse reciprocò ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior, per Hypoth. IX. & Prop. II. vel III. Lib. I. & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim, per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I. quod si distantia Lunæ à centro Terræ dicatur *D*, vis à qua motus talis oriatur, sit reciproce ut $D^{2\,4/243}$, id est reciprocè ut ea ipsius *D* dignitas, cujus index est $2\,4/243$, hoc est in ratione distantiæ paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ vicibus 60¾ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Tantillus autem accessus meritò contemnendus est. Oritur verò ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Restat igitur ut vis illa, quæ ad Terram spectat, sit reciprocè ut D^2; id quod etiam plenius constabit, conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

Prop. IV. Theor. IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris à centro Terræ est semidiametrorum terrestrium, secundum plerosque Astronomorum 59, secundum *Vendelinum* 60, secundum *Copernicum* 60⅓, secundum *Kircherum* 62½, & secundum *Tychonem* 56½. Ast *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis &

Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt Parallaxin Lunæ scrupulis totidem, hoc est quasi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi 61 semidiametrorum terrestrium, fere ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum; & Lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti à Gallis mensurantibus nuper definitum est: & si Luna motu omni privari fingatur, ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatio minuti primi cadendo describet pedes Parisienses $15^1/_{12}$. Colligitur hoc ex calculo, vel per Propositionem xxxvi Libri primi, vel (quod eodem recedit) per Scholium Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata distantiæ ratione inversâ, adeoque ad superficiem Terræ major sit vicibus 60×60 quam ad Lunam, corpus vi illa in regionibus nostris cadendo describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15^1/_{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15^1/_{12}$. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses $15^1/_{12}$, uti *Hugenius*, factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea vis qua Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab ea diversa est, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent pedes Parisienses $30^1/_6$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in Hypothesi quod Terra quiescit. Nam si Terra & Luna circa Solem moveantur, & interea quoque circa commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit 60½ semidiametrorum terrestrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

Prop. V. Theor. V.

Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, & circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & Mercurii ac Veneris reliquorumque circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Hypoth. II. à causis ejusdem generis dependent: præsertim cùm demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis ac Solis, & recedendo à Jove & Sole decrescant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decrescit in recessu à Terra.

Corol. 1. Igitur gravitas datur in Planetas universos. Nam Venerem, Mercurium cæterosque esse corpora ejusdem generis cum Jove nemo dubitat. Certe Planeta Hugenianus, eodem argumento quo Satellites Jovis gravitant in Jovem, gravis est in Saturnum. Et cum attractio omnis (per motus legem tertiam) mutua sit, Saturnus vicissim gravitabit in Planetam Hugenianum. Eodem argumento Jupiter in Satellites suos omnes, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque respicit, ese reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Prop. VI. Theor. VI.

> *Corpora omnia in Planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantiis à centro Planetœ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.*

Descensus gravium omnium in Terram (dempta saltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua resistentia oritur) æqualibus temporibus fieri jamdudum observarunt alii; & accuratissimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, sale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pixides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus suspendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oscillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes constituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aeris resistentia omnino paria: Et paribus oscillationibus juxta positæ ibant unà & redibant diutissime. Proinde copia materiæ in auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in totum lignum; hoc est ut pondus ad pondus. Et sit in

cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem esse atque in Terram non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terrestria ad usque Orbem Lunæ, & una cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; & per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia Spatia cum Luna, adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porrò quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquialtera distantiarum a centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove distantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent æqualia Spatia, perinde ut fit in gravibus, in hac Terra nostra. Et eodem argumento Planetæ circumsolares ab æqualibus à Sole distantiis dimissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porrò Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem pro quantitate materiæ suæ quàm cæteri, motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole distantiis) Satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate materiæ suæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: distantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis major semper foret quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione dimidiata quam proximè; uti calculis quibusdam initis inveni. Et si Satelles minus gravis esset in Solem in ratione illa *d* ad *e*, distantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quàm distantia centri Jovis à Sole in ratione illa dimidiata. Igitur si in æqualibus à Sole distantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujusvis in Solem major esset vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum millesima gravitatis totius; foret distantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quàm distantia Jovis à Sole parte $^1/_{2600}$ distantiæ totius, id est parte quinta distantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis excentricitas foret valde sensibilis.

Sed Orbes Satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & Comitis ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minus quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora Terrestria, quæ apud nos sunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia; omninò contra experientiam.

Corol. 2. Igitur corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Nam si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret, quoniam id non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, (per Hypoth. III.) & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Itaque Vacuum necessariò datur. Nam si spatia omnia plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti

vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minimè descendunt.

Corol. 4. Gravitatem diversi generis esse à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Estque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis: sed & in eodem corpore intendi potest & remitti; in recessu verò à magnete decrescit in ratione distantiæ plusquam duplicata, per Prop. LXXXV. Lib. I.; propterea quod vis longe fortior sit in contactu, quam cum attrahentia vel minimum separantur ab invicem.

Prop. VII. Theor. VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde consequens est, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porrò cum Planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuò,

cùm tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

Prop. VIII. Theor. VIII.

Si Globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi tota ex viribus pluribus composita, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio illa in majoribus distantiis satis obtineret, at prope superficiem Planetæ, ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV. Libri primi & ipsius Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad superficies Planetarum aliasve quasvis à centro distantias majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circa Solem dierum 224⅔, Satellitis extimi circumjovialis circa Jovem dierum 16¾, Satellitis Hugeniani circa Saturnum dierum 15 & horarum 22⅔, & Lunæ circa Terram 27 *dier.* 7 *hor.* 43 *min.* collatis cum distantia mediocri Veneris à Sole; cum Elongatione maxima Heliocentrica Satellitis extimi circumjovialis, quæ (in mediocri Jovis à Sole distantia juxta observationes *Flamstedii*) est 8′. 13″; cum elongatione maximæ Heliocentrica Satellitis Saturnii 3′.

20″; & cum distantia Lunæ à Terra, ex Hypothesi quod Solis parallaxis horizontalis seu semidiameter Terræ è Sole visæ sit quasi 20″; calculum ineundo inveni quod corporum æqualium & à Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $^1/_{1100}$, $^1/_{2360}$ & $^1/_{28700}$ respectivè. Est autem Solis semidiameter mediocris apparens quasi 16′. 6″. Illam Jovis è Sole visam *Flamstedius*, ex umbræ Jovialis diametro per Eclipses Satellitum inventa, determinavit esse ad elongationem Satellitis extimi ut 1 ad 24,9 adeoque cum elongatio illa sit 8′. 13″ semidiameter Jovis è Sole visi erit 19″¾. Diameter Saturni est ad diametrum Annuli ejus ut 4 ad 9, & diameter annuli è Sole visi (mensurante *Flamstedio*) 50″, adeoque semidiameter Saturnie è Sole visi 11″. Malim dicere 10″ vel 9″, propterea quod globus Saturni per lucis inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur. Hinc inito calculo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1063, 889, & 208. Unde cum pondera æqualium corporum à centris Solis, Jovis, Saturni ac Telluris æqualiter distantium sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $^1/_{1100}$, $^1/_{2360}$, $^1/_{28700}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis diminuuntur vel augentur pondera in duplicata ratione; erunt pondera eorundem æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum & Terram, in distantiis 10000, 1063, 889 & 208 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus versantium, ut 10000, 804½, 536 & 805½ respectivè. Pondera corporum in superficie Lunæ ferè duplo minora esse quam pondera corporum in superficie Terræ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Igitur pondera corporum æqualium, in superficiebus Terræ & Planetarum, sunt fere in ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. De Terræ quidem diametro è Sole visa nondum constat. Hanc assumpsi 40″, propterea quod observationes *Kepleri*, *Riccioli* & *Vendelini* non multo majorem esse permittunt; eam *Horroxii* & *Flamstedii* observationes paulo minorem adstruere videntur. Et malui in excessu peccare. Quòd si fortè diameter illa & gravitas in superficie Terræ mediocris sit inter diametros Planetarum & gravitatem in eorum superficiebus: quoniam Saturni, Jovis, Martis, Veneris & Mercurii è Sole visorum diametri sunt 18″, 39″½, 8″, 28″, 20″ circiter, erit diameter Terræ quasi 24″, adeoque Parallaxis Solis quasi 12″, ut *Horroxius* & *Flamstedius* propemodum statuere. Sed diameter paulo major melius congruit cum Regula hujus Corollarii.

Corol. 3. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates illæ sunt ut Planetarum Vires in distantiis à se æqualibus; id est in Sole, Jove, Saturno ac Terra ut 1, $^1/_{1100}$, $^1/_{2360}$, $^1/_{28700}$ respectivè. Si Parallaxis Solis statuatur minor quam 20″, debebit quantitas materiæ in Terra diminui in triplicata ratione.

Corol. 4. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam corporum æqualium & homogeneorum pondera in Sphæras homogeneas in superficiebus Sphærarum, sunt ut Sphærarum diametri per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera applicata ad diametros. Erant autem veræ Solis, Saturni, Jovis ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 889, 1063 & 208, & pondera in eosdem ut 10000, 536, 804½ & 805½, & propterea densitates sunt ut 100, 60, 76, 387. Densitas autem Terræ, quæ hic colligitur, non pendet à Parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quàm Jupiter, & Terra multo densior quàm Sol.

Corol. 5. Planetarum autem densitates inter se fere sunt in ratione composita ex ratione distantiarum à Sole & ratione dimidiata diametrorum apparentium è Sole visarum. Nempe Saturni, Jovis, Terræ & Lunæ densitates 60, 76, 387 & 700, fere sunt ut distantiarum reciproca $^1/_{9538}$, $^1/_{5201}$, $^1/_{1000}$ & $^1/_{1000}$, ducta in radices diametrorum apparentium 18″, 39″½, 40″, & 11″. Diximus utique, in Corollario secundo, gravitatem ad superficies Planetarum esse quam proximè in ratione dimidiata apparentium diametrorum è Sole visarum; & in Lemmate quarto densitates esse ut gravitates illæ applicatæ ad diametros veras: ideoque densitates fere sunt ut radices diametrorum apparentium applicatæ ad diametros veras, hoc est reciproce ut distantiæ Planetarum à Sole ductæ in radices diametrorum apparentium. Collocavit igitur Deus Planetas in diversas distantiis à Sole, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore fruatur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturne, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos; & Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium verò non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hac nostra; cum materia omnis densior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. IX. Theor. IX.

Gravitatem pergendo à superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum à centro quam proximè.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

Prop. X. Theor. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutissimè conservari posse.

In Scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, liberè movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentia Aeris amitteret motus sui partem $^1/_{3200}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè (per Prop. XL. Lib. II.) in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eaque de causa Globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione opposita. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores sunt quàm materia lucida Solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore massa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius in Terra quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aqua constaret; præsertim cum Terram quasi quintuplo densiorem esse quàm Jovem jam ante ostensum sit. Igitur si Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic spatio dierum viginti & unius, quibus longitudinem 320 semidiametrorum suarum describit, amitteret in Medio ejusdem densitatis cum Aere nostro motus sui partem fere decimam. Verum cum resistentia Mediorum

minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ vicibus 13⅔ levior est quàm argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui vicibus 800 levior est quàm aqua, minus resistat in eadem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit.

Prop. XI. Theor. XI.

Commune centrum gravitas Terræ Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin quartam.

Prop. XII. Theor. XII.

Solem motu perpetuo agitari sed nunquam longe recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum, per Corol. 3. Prop. VIII. materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1100 ad 1, & distantia Jovis à Sole sit ad semidiametrum Solis in eadem ratione circiter; commune centrum gravitatis Jovis & Solis incidet fere in superficiem Solis. Eodem argumento cùm materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 2360 ad 1, & distantia Saturni à Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo minori: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem Solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro à centro Solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, Sol pro vario Planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cùm Terra, Sol &

Planetæ omnes gravitent in se mutuò, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motûs perpetuò agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, à quo centrum Solis quam minimè discedit, & à quo idem adhuc minus discederet, si modò Sol densior esset & major, ut minus moveretur.

Prop. XIII. Theor. XIII.

Planetæ moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Solis; si Sol quiesceret & Planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in se mutùo perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quàm si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1100; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni à Jove est ad distantiam Saturni à Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16 $\times$ 1100 seu 1 ad 217 circiter. Error tamen omnis in motu Saturni circa Solem, à tanta in Jovem gravitate oriundus, evitari fere potest constituendo umbilicum Orbis Saturni in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus est vix superat minutos duos primos. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum

& Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\{16 \times 81 \times 2360\} \div 25$ seu 122342, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 122342 seu 1 ad 1867. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores.

Prop. XIV. Theor. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Attamen à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri.

Prop. XV. Theor. XV.

Invenire Orbium transversas diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione sesquialtera temporum periodicorum per Prop. XV. Lib. I. deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

Prop. XVI. Prob. I.

Invenire Orbium Excentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

Prop. XVII. Theor. XVI.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I, & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam verò Lunæ, circa axem suum uniformiter revolventis, dies menstruus est; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipsius semper respiciet, & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde à Terra. Hæc est libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta est ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porrò hæc ita se habere, ex Phænomenis manifestum est.

Prop. XVIII. Theor. XVII.

Axes Planetarum dimetris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus observationibus *Cassini* & *Flamstedii*) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra paulò altior esset sub æquatore quàm ad polos, Maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Figure for Prop. XIX.

Ad hujus Problematis solutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quàm præceptis addiscitur. Inito igitur calculo invenio, per Prop. IV. Lib. I. quod vis centrifuga partium Terræ sub

æquatore, ex motu diurno oriunda, sit ad vim gravitatis ut 1 ad $290^4/_5$. Unde si *APBQ* figuram Terræ designet revolutione Ellipseos circa axem minorem *PQ* genitam; sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, à polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca* esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 291 ad 290, eò quòd vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 sustinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure sustinebit partes reliquas. Porrò (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco *Q* sphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* descriptam, ut $126^2/_{15}$ ad $125^2/_{15}$. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in Sphæroidem, convolutione Ellipseos *APBQ* circa axem *AB* descriptam, est ad gravitatem in eodem loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ut $125^2/_{15}$ ad $126^2/_{15}$. Est autem gravitas in loco *A* in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AP*, *PQ* perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in *A*, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. Est igitur gravitas in *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ad gravitatem in *A* in Terram ut 126 ad 125½, & gravitas in loco *Q* in Sphæram centro *C* radio *QC* descriptam, est ad gravitatem in loco *A* in Sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est ut 100 ad 101: Conjungantur jam hæ tres rationes, $126^2/_{15}$ ad $125^2/_{15}$, 125½ ad 126 & 100 ad 101 & fiet gravitas in loco *Q* in Terram ad gravitatem in loco *A* in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125½ \times 101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cum per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. gravitas in canalis crure utrovis *ACca* vel *QCcq* sit ut distantia locorum à centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure *ACca* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est ut 505 ad 501. Ac proinde si vis

centrifuga partis cujusque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 290. Hoc est, vis centripeta quæ deberet esse ponderis pars $^4/_{505}$ est tantum pars $^1/_{290}$, & propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $^4/_{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* superet altitudin aquæ in crure *QCcq* parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $^1/_{290}$ faciet ut excessus altitudinis in crure *ACca* sit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $^3/_{689}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 692 ad 689. Ideoque cùm Terræ semidiameter mediocris, juxta nuperam Gallorum mensuram, sit pedum Parisiensium 19615800 seu milliarium 3923 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000;) Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos, excessu pedum 85200 seu milliarium 17.

Si Planeta vel major sit vel densior, minorve aut rarior quàm Terra, manente tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur in eadem duplicata ratione. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23, 56′ *Jupiter* autem horis 9, 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, differentia diametrorum *Jovis* erit ad ipsius diametrum minorem ut $\{29 \times 3\} \div \{5 \times 689\}$ ad 1, seu 1 ad $39^3/_5$. Est igitur diameter *Jovis* ab oriente in occidentem ducta, ad ipsius diametrum inter polos ut $40^3/_5$ ad $39^3/_5$ quam proximè. Hæc ita se habent ex Hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quàm ad circumferentiam, diameter, quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Prop. XX. Prob. III.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est reciprocè ut 692 ad 689. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciprocè ut crura, id est reciprocè ut distantiæ corporum à centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut distantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciprocè ut distantiæ locorum à centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis, pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proximè ut Sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est ut quadratum Sinus recti Latitudinis. Exempli gratia, Latitudo *Lutetiæ Parisiorum* est 48 *gr.* 45′: Ea Insulæ *Goree* prope *Cape Verde* 14 *gr.* 15′: ea *Cayennæ* ad littus *Guianæ* quasi 5 *gr.* ea locorum sub Polo 90 *gr.* Duplorum 97½ *gr.* 28½ *gr.* 10 *gr.* & 180 *gr.* Sinus versi sunt 11305, 1211, 152, & 20000. Proinde cum gravitas in Polo sit ad gravitatem sub Æquatore ut 692 ad 689, & excessus ille gravitatis sub Polo ad gravitatem sub Æquatore ut 3 ad 689; erit excessus gravitatis *Lutetiæ*, in Insula *Goree* & *Cayennæ*, ad gravitatem sub æquatore ut $\{3 \times 11305\} \div 20000$, $\{3 \times 1211\} \div 20000$ & $\{3 \times 152\} \div 20000$ ad 689, seu 33915, 3633, & 456 ad 13780000, & propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 13813915, 13783633, 13780456, & 13780000. Quare cum longitudines Pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & $^{17}/_{24}$ partium digiti; longitudines Pendulorum in Insulâ *Goree*, in illâ *Cayennæ* & sub Æquatore, minutis singulis secundis oscillantium superabuntur à longitudine Penduli Parisiensis excessibus $^{81}/_{1000}$, $^{89}/_{1000}$ & $^{90}/_{1000}$ partium digiti. Hæc omnia ita se habebunt, ex Hypothesi quod Terra ex uniformi materia constat. Nam si materia ad centrum paulò densior sit quàm ad superficiem, excessus illi erunt paulò majores; propterea quod, si materia ad centrum redundans, qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur, gravitas in Terram

reliquam uniformiter densam erit reciprocè ut distantia ponderis à centro; in materiam verò redundantem reciprocè ut quadratum distantiæ à materia illa quam proximè. Gravitas igitur sub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quàm pro computo superiore, & propterea Terra ibi propter defectum gravitatis paulò altius ascendet quàm in præcedentibus definitum est. Jam verò Galli factis experimentis invenerunt quod Pendulorum minutis singulis secundis oscillantium longitudo *Parisiis* major sit quàm in Insula *Goree*, parte decima digiti, & major quàm *Cayennæ* parte octava. Paulò majores sunt hæ differentiæ quam differentiæ $^{81}/_{1000}$ & $^{89}/_{1000}$ quæ per computationem superiorem prodiere: & propterea (si crassis hisce Observationibus satìs confidendum sit) Terra aliquanto altior erit sub æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem. Si excessus gravitatis in locis hisce Borealibus supra gravitatem ad æquatorem, experimentis majori cum diligentia institutis, accuratè tandem determinetur, deinde excessus ejus ubique sumatur in ratione Sinus versi latitudinis duplicatæ; determinabitur tum Mensura Universalis, tum Æquatio temporis per æqualia pendula in locis diversis indicati, tum etiam proportio diametrorum Terræ ac densitas ejus ad centrum; ex Hypothesi quod densitas illa, pergendo ad circumferentiam, uniformiter decrescat. Quæ quidem Hypothesis, licet accurata non sit, ad ineundum tamen calculum assumi potest.

Prop. XXI. Theor. XVIII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

Prop. XXII. Theor. XIX.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis Principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in

Ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna nostra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5 Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvam, atque adeò propius accedit ad Terram, in Syzygiis quàm in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Excentricitatis. Excentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quàm in Quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8 Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quiescunt in Syzygiis suis, & velocissimè regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in Syzygiis: & motus medius velocior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius Aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum observatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeò perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prostaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

Prop. XXIII. Prob. IV.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 9 *gr.* 34′. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujusque in consequentia est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respectivè, ut motus Nodorum & Augis Satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ ut sunt toti motus Nodorum temporibus periodicis Satellitis & Lunæ ad invicem, per idem Corollarium, adeoque in Satellite extimo non superat 6″. 22‴. Parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fit ut motus Satellitum summè regulares reperiantur, utque Astronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut asserant tardissimè retrogradum. Nam *Flamstedius* collatis suis cum *Cassini* Observationibus Nodos tarde regredi deprehendit.

Prop. XXIV. Theor. XX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri debere.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quàm Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali

inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjugentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ à Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ à Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantiis à Terra. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis

intensione & remissione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum versus effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in Syzygiis Solstitialibus quàm in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in Quadraturis Æquinoctialibus; eò quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experientiâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à Terra, tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum quàm sequantur, & sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.

Figure for Prop. XXIV.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *Pp*, polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas mensuratas à centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas; & si axibus *Hh*, *Kk* describatur Ellipsis, deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur Sphærois *HPKhpk*; designabit hæc figuram Maris quam proximè, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam si in præfata Ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibusvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum Lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Distinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus

Hemisphæricos, unum in Hemisphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hemisphærio opposito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuò oppositi veniunt per vices ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Australes magis Australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem. Æstus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & Lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solstitiorum; præsertim si Lunæ Nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experientiâ compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* verò altitudine quindecim digitorum: Observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proximè post Syzygias majores reddit, eosque proximè post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus non sint primi à Syzygiis sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeò ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti à Syzygiis.

Porrò fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quàm per alia, quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales à diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua

tranquillè stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham*, sub latitudine Boreali 20 *gr.* 50 *min.* *Halleius* ex Nautarum Observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per Æquatorem sequente stagnat, dein Lunâ ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinensi* inter Continentem & Insulam *Luconiam*, alter à Mari *Indico* inter Continentem & Insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim à Mari *Indico*, & spatio horarum sex à Mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia Marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

Prop. XXV. Prob. V.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Figure for Prop. XXV.

Designet *Q* Solem, *S* Terram, *P* Lunam, *PADB* orbem Lunæ. In *QP* capiatur *QK* æqualis *QS*; sitque *QL* ad *QK* in duplicata ratione *QK* ad *QP* & ipsi *PS* agatur parallela *LM*; & si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam *QS* vel *QK*, erit *QL* gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus *QM*, *LM*, quarum *LM* & ipsius *QM* pars *SM* perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expositum est. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur motus Terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas *SM* & *ML* designare. Vis *ML* (in mediocri sua quantitate) est ad vim gravitatis, qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam *PS* revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id est ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178^8/_{11}$. Vis qua Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam *PS* semidiametrorum terrestrium 60½ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut 60½ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 × 60. Ideoque vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 × 60½ ad 60 × 60 × 60 × $178^8/_{11}$ seu 1 ad 638092,6. Unde ex proportione linearum *SM*, *ML* datur etiam vis *SM*: & hæ sunt vires Solis quibus motus Lunæ perturbantur. *Q. E. I.*

Prop. XXVI. Prob. VI.

Invenire incrementum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit.

Figure for Prop. XXVI.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam ponamus etiam lineas *QP*, *QS* sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis *LM* reducetur semper ad mediocrem suam quantitatem *SP*, ut & vis *SM* ad mediocrem suam quantitatem 3*PK*. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim *SL*; & hæc vis, si in radium *SP* demittatur perpendiculum *LE*, resolvitur in vires *SE*, *EL*, quarum *SE*, agendo semper secundum radium *SP*, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ *QSP* radio illo *SP* factam; & *EL* agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in transitu ipsius à Quadratura *C* ad conjunctionem *A*, singulis temporis momentis facta, est ut ipsa vis accelerans *EL*, hoc est ut 3*PK* × *SK* ÷ *SP*. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum *CSP*, vel etiam per arcum *CP*. Ad *CS* erigatur Normalis *CG* ipsi *CS* æqualis. Et diviso arcu quadrantali *AC* in particulas innumeras æquales *Pp* &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque *pk* perpendiculari ad *CS*, jungatur *SG* ipsis *KP*, *kp* productis occurrens in *F* & *f*; & erit *Kk* ad *PK* ut *Pp* ad *Sp*, hoc est in data ratione, adeoque *FK* × *Kk* seu area *FKkf* ut 3*PK* × *SK* ÷ *SP* id est ut *EL*; & compositè, area tota *GCKF* ut summa omnium virium *EL* tempore toto *CP* impressarum in Lunam, atque adeò etiam ut velocitas hac summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ *CSP*, seu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quiescentem ad distantiam *SP*, tempore suo periodico *CADBC* dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore *CS* cadendo, describeret longitudinem ½*CS*, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in orbe suo movetur. Patet hoc per Schol. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum *Kd* in *SP* demissum sit ipsius *EL* pars tertia, & ipsius *SP* seu *ML* in octantibus pars dimidia, vis *EL* in Octantibus, ubi maxima est, superabit vim *ML* in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem

revolvi posset, ut 100 ad ⅔ × 17872½ seu 11915, & tempore *CS* velocitatem generare deberet quæ esset pars $^{100}/_{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem *CPA* velocitatem majorem generaret in ratione *CA* ad *CS* seu *SP*. Exponatur vis maxima *EL* in Octantibus per aream *FK* × *Kk* rectangulo ½*SP* × *Pp* æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis *CP* generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor *EL* eodem tempore generat ut rectangulum ½*SP* × *CP* ad aream *KCGF*: tempore autem toto *CPA*, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum ½*SP* × *CA* & triangulum *SCG*, sive ut arcus quadrantalis *CA* ad radium *SP*. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitatis posterior, toto tempore genita, erit pars $^{100}/_{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915 summa 11915 + 50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia *A*, ac differentia 11915 - 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium *FKCG* ad triangulum *SCG* (vel quod perinde est, ut quadratum Sinus *PK* ad quadratum Radii *SP*, id est ut *Pd* ad *SP*) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio *P*.

Hæc omnia ita se habent, ex Hypothesi quod Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris verè sit dierum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $^{100}/_{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $^{100}/_{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023 - 50 ad 11023 + 50, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio *P* versatur, ut 10973 ad 10973 + *Pd*, existente videlicet *SP* æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè ut summa numeri $21^{46}/_{100}$ & Sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem

ratione.

Prop. XXVII. Prob. VII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea distantia Lunæ à Terrâ est in ratione compositâ ex dimidiatâ ratione Areæ directè & dimidiatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantia à Terra. Tentent Astronomi quàm probè hæc Regula cum Phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratiùs ex Phænomenis quàm antehac definiri potest.

Prop. XXVIII. Prob. VIII.

Invenire diametros Orbis in quo Luna absque excentricitate moveri deberet.

Figure for Prop. XXVIII.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem $2PK$ (Vide *Figur. pag. 434.*) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris KS, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\{AS + CS\} \div 2$ dicatur N, sunt ut $178725 \div ASq. - 2000 \div \{CS \times N\}$ & $178725 \div$

CSq. + 1000 ÷ {*AS* × *N*} quam proxime; seu ut 178725*N* in *CSq.* - 2000*ASq.* in *CS*, & 178725*N* in *ASq.* + 1000 *CSq.* × *AS*. Nam se gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per numerum 178725, vis mediocris *ML*, quæ in Quadraturis est *PS* vel *SK* & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris *SM* in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris *ML* subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur à Terra, quamque jam ante nominavi 2*PK*. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis *A* & *B* est ad ipsius velocitatem in Quadraturis *C* & *D* ut *CS*, ad *AS* & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; id est ut 11073*CS* ad 10973*AS*. Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet Curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem Curvaturam in Quadraturis ut 120407 × 178725*ASq.* × *CSq.* × *N* - 120407 × 2000*AS qq.* × *CS* ad 122611 × 178725*ASq.* × *CSq.* × *N* + 122611 × 1000*CS qq.* × *AS*, id est ut 2151969*AS* × *CS* × *N* - 24081*AS cub.* ad 2191371*AS* × *CS* × *N* + 12261*CS cub.*

Quoniam figura orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin *DBCA*, in cujus centro *S* Terra collocetur, & cujus axis major *DC* Quadraturis, minor *AB* Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria, cujus Curvaturam consideramus, describi debet in plano quod motu omni angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura *Cpa*, cujus puncta singula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in Ellipsi, quod locum Lunæ representet, & ducendo *Sp* æqualem *SP*, ea lege ut angulus *PSp* æqualis sit motui apparenti Solis à tempore Quadraturæ *C* confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus *CSp* sit ad angulum *CSP* ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu 29 *d.* 12. *h.* 44′, ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Capiatur igitur angulus *CSa* in eadem ratione ad angulum rectum *CSA*, & sit longitudo *Sa* æqualis longitudini *SA*; & erit *a* Apsis ima & *C* Apsis summa orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *S* intervallo *SA* descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice *A* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*; & quod curvatura Ellipseos in *A* sit ad curvaturam circuli illius in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & curvatura circuli illius ad curvaturam

circuli centro *S* intervallo *SC* descripti ut *SC* ad *SA*; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in *C* in duplicata ratione *SA* ad *SC*; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice *C* & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Spa* in vertice *C* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli *CSP* ad angulum *CSp*. Quæ quidem rationes ex Sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. Collatis autem his rationibus inter se, prodit curvatura figuræ *Cpa* in *a* ad ipsius curvaturam in *C*, ut $AS\ cub. + {}^{16824}/_{100000} CSq. \times AS$ ad $CS\ cub. + {}^{16824}/_{100000} ASq. \times CS$. Ubi numerus ${}^{16824}/_{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum *CSP* & *CSp* applicatam ad Quadratum anguli minoris *CSP*, seu (quod perinde est) differentiam Quadratorum temporum 27 *d.* 7 *h.* 43′, & 29 *d.* 12 *h.* 44′, applicatam ad Quadratum temporis 27 *d.* 7 *h.* 43′.

Igitur cum *a* designet Syzygiam Lunæ, & *C* ipsius Quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio *CS* ad *AS*, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AS \times CS$ applicati, fiunt $2062{,}79 CS\ qq. - 2151969 N \times CS\ cub. + 368682 N \times AS \times CSq. + 36342 ASq. \times CSq. - 362046 N \times ASq. \times CS + 2191371 N \times AS\ cub. + 4051{,}4 AS\ qq. = 0$. Hic pro terminorum *AS* & *CS* semisummâ *N* scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo *x*, fit $CS = 1 + x$, & $AS = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur *x* æqualis 0,0072036, & inde semidiameter *CS* fit 1,0072, & semidiameter *AS* 0,9928, qui numeri sunt ut $69^{11}/_{12}$ & $68^{11}/_{12}$ quam proximè. Est igitur distantia Lunæ à Terra in Syzygiis ad ipsius distantiam in Quadraturis (seposita scilicet excentricitatis consideratione) ut $68^{11}/_{12}$ ad $69^{11}/_{12}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

Prop. XXIX. Prob. IX.

Invenire Variationem Lunæ.

Figure for Prop. XXIX.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad

Terram ducto describit. Si Luna *P* in Ellipsi *DBCA* circa Terram in centro Ellipseos quiescentem moveretur, & radio *SP* ad Terram ducto describeret aream *CSP* tempori proportionalem; esset autem Ellipseos semidiameter maxima *CS* ad semidiametrum minimam *SA* ut $69^{11}/_{12}$ ad $68^{11}/_{12}$: foret Tangens anguli *CSP* ad Tangentem anguli motus medii à quadratura *C* computati, ut Ellipseos semidiameter *SA* ad ejusdem semidiametrum *SC* seu $68^{11}/_{12}$ ad $69^{11}/_{12}$. Debet autem descriptio areæ *CSP*, in progressu Lunæ à Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utq; excessus momenti in loco quovis intermedio *P* supra momentum in Quadratura sit ut quadratum Sinus anguli *CSP*. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli *CSP* diminuatur in dimidiata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est in ratione numeri $68^{5958}/_{10000}$ ad numerum $68^{11}/_{12}$. Quo pacto tangens anguli *CSP* jam erit ad tangentem motus medii ut $68^{5958}/_{10000}$ ad $69^{11}/_{12}$, & angulus *CSP* in Octantibus, ubi motus medius est 45 *gr.* invenietur 44 *gr.* 27′. 29″: qui subductus de angulo motus medii 45 *gr.* relinquit Variationem 32′. 31″. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo à Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum *CSA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in antecedentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum *CSa* angulo recto majorem in ratione revolutionis Lunaris Synodicæ ad revolutionem periodicam, id est in ratione 29 *d.* 12 *h.* 44′. ad 27 *d.* 7 *h.* 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *S* dilatantur in eadem ratione, & Variatio quæ secus esset 32′. 31″. jam aucta in eadem ratione, fit 35′. 9″. Hæc ab Astronomis constituitur 40′, & ex recentioribus Observationibus 38′. *Halleius* autem recentissimè deprehendit esse 38′ in Octantibus versus oppositionem Solis, & 32′ in Octantibus Solem versus. Unde mediocris ejus magnitudo erit 35′: quæ cum magnitudine à nobis inventa 35′. 9″ probe congruit. Magnitudinem enim mediocrem computavimus, neglectis differentiis, quæ à curvaturâ Orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in Gibbosam & plenam, oriri possint.

Prop. XXX. Prob. X.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

Figure for Prop. XXX.

Designet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* vestigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n*, Nodos, *nTNm* lineam Nodorum infinitè productam, *PI*, *PK*; perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum Eclipticæ; *Q*, *q* Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* Quadraturis intrajacentem. Et vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex erit, altera lineæ 2*IT* vel 2*Kp*, altera lineæ *PI* proportionalis. Et Luna vi priore in Solem, posteriore in lineam *ST* trahitur. Componitur autem vis posterior *PI* ex viribus *IT* & *PT*, quarum *PT* agit secundum planum orbis Lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis autem *IT* cum vi 2*IT* componit vim totam 3*IT*, qua planum Orbis Lunaris perturbatur. Et hæc vis per Prop. XXV. est ad vim qua Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico revolvi posset, ut 3*IT* ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut *IT* ad Radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis; & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet jam *PM* arcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & *ML* lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3*IT*, eodem tempore describere posset. Jungantur *PL*, *MP*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi secent planum Eclipticæ; inque *Tm* demittatur perpendiculum *PH*. Et quoniam *ML* parallela est ipsi *ST*, si *ml* parallela sit ipsi *ML*, erit *ml* in plano Eclipticæ, & contra. Ergo *ml*, cum sit in plano Eclipticæ, parallela erit ipsi *ML*, & similia erunt triangula *LMP*, *Lmp*. Jam cum *MPm* sit in plano Orbis, in quo Luna in loco *P* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *Nn* per Orbis illius Nodos *N*, *n*, ductam. Et quoniam vis qua lineola *LM* generatur, si tota simul & semel in loco *P* impressa esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus Chorda esset *LP*, atque adeò transferret Lunam de plano *MPmT* in planum *LPlT*; motus Nodorum à vi illa genitus æqualis erit angulo *mTl*. Est autem *ml* ad *mP* ut *ML* ad *MP*, adeoque cum *MP* ob datum tempus data sit, est *ml* ut rectangulum $ML \times mP$, id est ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus *mTl*, si modo angulus *Tml*

rectus sit, est ut *ml* ÷ *Tm*, & propterea ut *IT* × *Pm* ÷ *Tm* id est (ob proportionales *Tm* & *mP*, *TP* & *PH*) ut *IT* × *PH* ÷ *TP*, adeoque ob datam *TP*, ut *IT* × *PH*. Quod si angulus *Tml*, seu *STN* obliquus sit, erit angulus *mTl* adhuc minor, in ratione Sinus anguli *STN* ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut *IT* × *PH* & Sinus anguli *STN* conjunctim, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum *TPI*, *PTN* & *STN*.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola *ml* abibit in infinitum, & angulus *mTl* evadet angulo *mPl* æqualis. Hoc autem in casu, angulus *mPl* est ad angulum *PTM*, quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59,575. Nam angulus *mPl* æqualis est angulo *LPM*, id est angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quam præfata vis Solaris 3*IT* dato illo tempore generare possit; & angulus *PTM* æqualis est angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, eodem tempore generat. Et hæ vires, uti supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (respectu fixarum) sit 32′. 56″. 27‴. $12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc casu erit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}. ut contentum sub sinibus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (seu distantiarum Lunæ à Quadratura, Lunæ à Nodo & Nodi à Sole) ad cubum Radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Figure for Corol. 1.

Corol. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec secent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres Sinus. Nempe *PK* Sinus distantiæ Lunæ à Quadratura, *PH* Sinus distantiæ Lunæ à Nodo, & *AZ* Sinus distantiæ Nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum

$PK \times PH \times AZ$. Est autem PT ad PK ut PM ad Kk, adeoque ob datas PT & PM est Kk ipsi PK proportionalis. Est & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est ut area *PDdM*, & *AZ qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut quadratum Sinus distantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum *QAq*, summa omnium arearum *PDdM*, quo tempore Luna pergit à *Q* ad *M*, erit area *QMdE* quæ ad circuli tangentem *QE* terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum *n*, summa illa erit area tota *EQAn* quam linea *PD* describit; dein Luna pergente ab *n* ad *q*, linea *PD* cadet extra circulum, & aream *nqe* ad circuli tangentem *qe* terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam verò progrediuntur, subduci debet de area priore, & cum æqualis sit areæ *QEN*, relinquet semicirculum *NQAn*. Igitur summa omnium arearum *PDdM*, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area *PDdM*, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu *PM* & radio *MT*; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quàm rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quàm revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium à se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus orarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}, motus mediocris horarius in hoc casu erit 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id est (ob datam aream *PDdM* in Syzygiis descriptam) ut *AZ qu.* erit etiam motus mediocris ut *AZ qu.* atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT*

qu. Q. E. D.

Prop. XXXI. Prob. XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Figure for Prop. XXXI.

Designet *Qpmaq* Ellipsim, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAq* circulum circumscriptum, *T* Terram in utriusque centro communi, *S* Solem, *p* Lunam in Ellipsi moventem, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima describit, *N* & *n* Nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in *P* & *M*, & lineæ Nodorum in *D* & *d*. Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area *pDdm*.

Nam si *PF* tangat circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F*, & *pf* tangat Ellipsin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in *f*, conveniant autem hæ Tangentes in axe *TQ* ad *Y*; & si *ML* designet spatium quod Luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum *PM*, urgente & impellente vi prædicta 3*IT*, motu transverso describere posset, & *ml* designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3*IT*, describere posset; & producantur *LP* & *lp* donec occurrant plano Eclipticæ in *G* & *g*; & jungantur *FG* & *fg*, quarum *FG* producta secet *pf*, *pg* & *TQ* in *c*, *e* & *R* respectivè, & *fg* producta secet *TQ* in *r*: Quoniam vis 3*IT* seu 3*PK* in circulo est ad vim 3*IT* seu 3*pK* in Ellipsi, ut *PK* ad *pK*, seu *AT* ad *aT*; erit spatium *ML* vi priore genitum, ad spatium *ml* vi posteriore genitum, ut *PK* ad *pK*, id est ob similes figuras *PYKp* & *FYRc*, ut *FR* ad *cR*. Est autem *ML* ad *FG* (ob similia triangula *PLM*, *PGF*) ut *PL* ad *PG*, hoc est (ob parallelas *Lk*, *PK*, *GR*) ut *pl* ad *pe*, id est (ob similia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inversè ut *LM* est ad *lm*, seu *FR* ad *cR*, ita est *FG* ad *ce*. Et propterea si *fg* esset ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id est ut *fr* ad *cR*, (hoc est ut *fr* ad *FR* & *FR* ad *cR* conjunctim, id est ut *fT* ad *FT* & *FG* ad *ce* conjunctim,) quoniam ratio *FG* ad *ce* utrinque ablata relinquit rationes *fg* ad *FG* & *fT* ad *FT*, foret *fg* ad *FG* ut *fT* ad *FT*; propterea quod anguli, quos *FG* & *fg* subtenderent ad Terram *T*, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in circulo arcum *PM*, in Ellipsi arcum

pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo *fg* esset ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id est si *fg* æqualis esset $ce \times fY \div cY$. Verum ob similia triangula *fgp*, *cep*, est *fg* ad *ce* ut *fp* ad *cp*; ideoque *fg* æqualis est $ce \times fp \div cp$, & propterea angulus, quem *fg* revera subtendit, est ad angulum priorem, quem *FG* subtendit, hoc est motus Nodorum in Ellipsi ad motum Nodorum in Circulo, ut hæc *fg* seu $ce \times fp \div cp$ ad priorem *fg* seu $ce \times fY \div cY$, id est ut $fp \times cY$ ad $cp \times fY$, seu *fp* ad *fY* & *cY* ad *cp*; hoc est, si *pb* ipsi *TN* parallela occurrat *FP* in *b*, ut *Fb* ad *FY* & *FY* ad *FP*; hoc est ut *Fb* ad *FP* seu *Dp* ad *DP*, adeoque ut area *Dpmd* ad aream *DPMd*. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum *pDdm*, quo tempore Luna pergit à Quadratura ad locum quemvis *m*, sit area *mpQEd*, quæ ad Ellipseos Tangentem *QE* terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem Nodorum in circulo, ut Ellipsis ad circulum, id est ut *Ta* ad *TA*, seu $68^{11}/_{12}$ ad $69^{11}/_{12}$. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in circulo sit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* si capiatur angulus 16″. 21‴. 2^{iv}. 36^{v}. ad angulum 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut $68^{11}/_{12}$ ad $69^{11}/_{12}$, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipsi ad 16″. 21‴. 2^{iv}. 36^{v}. ut *AZq.* ad *ATq.*; hoc est ut quadratum Sinus distantiæ Nodi à Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quàm in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadrantibus, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem à Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis,

supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadrantibus quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadraturis & quadratum Sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna percurrit *PM*, (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quam proximè. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum Sinus distantiæ Lunæ à Quadratura & semissem quadrati Radii ad semissem quadrati Radii, conjunctim. Unde si Nodi in Quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo à Syzygiâ & Quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duabus inter Syzygiam & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facilè constabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur) erat $32''. 42'''. 5^{iv}. 12^{v}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud est $17'''. 43^{iv}. 10^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$, motui horario mediocri superius invento $16''. 21'''. 2^{iv}. 36^{v}$. subducta, relinquit $16''. 16'''. 36^{iv}. 48^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

Si Nodi versantur extra Quadraturas, & spectentur loca bina à

Syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum Nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis & Nodi in Quadraturis versantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, à causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum situ, ad 16″. 16‴. 36^{iv}. 48^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id est ut quadratum Sinus distantiæ Nodorum à Syzygiis ad quadratum Radii.

Prop. XXXII. Prob. XII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus est summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum versari in *N*, & singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio, datum semper servet situm ad Stellas Fixas. Interea verò Solem *S*, per motum Terræ, progredi à Nodo, & cursum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad Solem semper ducta, intersectione sua & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo describit: & motus horarius mediocris (per jam ostensa) erit ut *AZq.* id est (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum sub *AZ* & *ZY*, hoc est ut area *AZYa*. Et summa omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut summa omnium arearum *aYZA*, id est ut area *NAZ*. Est autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo sub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea summa omnium rectangulorum in circulo toto ad summam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum sub circumferentia tota & radio; id est ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo respondens, erat 16″. 16‴. 36^{iv}. 48^{v}. Et hic motus, anno toto sidereo dierum 365. 6 *hor.* 9 *min.* fit 39 *gr.* 38′. 5″. 39‴. Ideoque hujus dimidium 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½ est motus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab *N* ad *A*, est ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½ ut area *NAZ* ad circulum totum.

Figure for Prop. XXXII.

Hæc ita se habent, ex Hypothesi quod Nodus horis singulis in locum

priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat à quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39 *gr.* 38′. 5″. 39‴. seu 39,6349 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis *N* sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut *AZq.* ad *ATq.* erit motus Solis ad motum Nodi in *N*, ut 360 *ATq.* ad 39,6349 *AZq.*; id est ut 9,0829032 *ATq.* ad *AZq.* Unde si circuli totius circumferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo Sol percurrat particulam *Aa*, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum *T* revolvatur, reciprocè ut 9,0829032 *ATq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.* Nam tempus est reciprocè ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum *NA*, exponatur per Sectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum *Aa*, exponatur per Sectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aY* in *Nn* demisso) si in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis ut sit rectangulum *dZ* in *ZY* ad Sectoris particulam *ATa* ut *AZq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.* id est ut sit *dZ* ad ½*AZ* ut *ATq.* ad 9,0829032 *ATq.* + *AZq.*; rectangulum *dZ* in *ZY* designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus *Aa* percurritur. Et si punctum *d* tangit curvam *NdGn*, area curvilinea *NdZ* erit decrementum totum, quo tempore arcus totus *NA* percurritur; & propterea excessus Sectoris *NAT* supra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area *AaYZ* diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ sit ad longitudinem *AZ* ut *AZq.* ad 9,08299032 *ATq.* + *AZq.* Sic enim rectangulum *eZ* in *ZY* erit ad aream *AZYa* ut decrementum temporis, quo arcus *Aa* percurritur, ad tempus totum, quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum *e* tangat curvam *NeFn*, area tota *NeZ*, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus *AN* percurritur; & area reliqua *NAe* respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus totus *NA*, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò si circuli radius *AT* ponatur 1, erit area semicirculi 1,570796; & area figuræ *NeFnT*, per methodum Serierum infinitarum quæsita, prodibit 0,1188478. Motus autem qui respondet

circulo toti erat 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½; & propterea motus, qui figuræ *NeFnT* duplicatæ respondet, est 1 *gr.* 29′. 57″. 51‴½. Qui de motu priore subductus relinquit 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit 341 *gr.* 40′. 55″. 2‴. motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360 *gr.* ut Nodi motus jam inventus 18 *gr.* 19′. 4″. 58‴. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. Hic est motus medius Nodorum in anno sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est 19 *gr.* 20′. 31″. 1‴. Differentia minor est parte quadringentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Excentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Excentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

Prop. XXXIII. Prob. XIII.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

Figure for Prop. XXXIII.

In tempore quod est ut area *NTA* - *NdZ*, (*in Fig. præced.*) motus iste est ut area *NAeN*, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro *C*, intervallo quovis *CD*, describatur circulus *BEFD*. Producatur *DC* ad *A*, ut sit *AB* ad *AC* ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis: (id est ut 19 *gr.* 18′. 0″. 22‴. ad 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, atque adeo *BC* ad *AC* ut motuum differentia 0 *gr.* 31′. 2″. 27‴½, ad motum posteriorem 19 *gr.* 49′. 2″. 49‴½, hoc est, ut 1. ad 38⅓) dein per punctum *D* ducatur infinita *Gg*, quæ tangat circulum in *D*; & si capiatur angulus *BCE* vel *BCF* æqualis semissi distantiæ Solis à loco Nodi, per motum medium invento; & agatur *AE* vel *AF* secans perpendiculum *DG* in *G*; & capiatur angulus qui sit ad motum Nodi inter ipsius Syzygias (id est ad 9 *gr.* 10′. 40″.) ut tangens *DG* ad circuli *BED* circumferentiam totam, atque angulus iste ad motum medium Nodorum addatur; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA* - *NdZ*, & motum Nodi per aream *NAeN*; ut

rem perpendenti constabit. Hæc est æquatio annua motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minimè necessaria est. Nam cum Variatio inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri annuæ, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″. 18‴. 41^{iv}½. Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit 1 *gr.* 30′. Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probè quadrant.

Prop. XXXIV. Prob. XIV.

Invenire Variationem horariam inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Figure for Prop. XXXIV.

Designent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe suo; *p* vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna versatur in *P*; & angulus *Pgp* inclinatio ejusdem post momentum temporis completum, adeoque angulus *GPg* Variatio momentanea inclinationis. Est autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg* ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus *GTg* (per Prop. XXX.) sit ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times PG \times AZ$ ad *AT cub.* erit angulus *GPg* (seu inclinationis horaria Variatio) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times Pp \div PG$ ad *AT cub.* *Q. E. I.*

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Sinus *IT*. Inclinationis autem Variatio tantum augebitur per decrementum

Sinus *IT*, quantum diminuitur per decrementum motus Nodorum; & propterea idem manebit atque prius.

Corol. 1. Si ad *Nn* erigatur perpendiculum *TF*, sitque *pM* motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula *pK*, *Mk* in *QT* demissa & utrinque producta occurrant *TF* in *H* & *h*: erit *Kk* ad *Mp* ut *pK* seu *IT* ad *AT*, & *TZ* ad *AT* ut *TG* ad *Hp*; ideoque $IT \times TG$ æquale $Kk \times Hp \times TZ \div Mp$, hoc est æquale areæ *HpMh* ductæ in rationem $TZ \div Mp$: & propterea inclinationis Variatio horaria ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut *HpMh* ducta in $AZ \times \{TZ \div Mp\} \times \{Pp \div PG\}$ ad *AT cub.*

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad 33″. 10‴. 33^{iv}, ut aggregatum omnium arearum *HpMh*, in revolutione puncti *p* generatarum, & sub signis propriis + & - conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times Pp \div PG$, ad $Mp \times AT$ *cub.* id est ut circulus totus *QAqa* ductus in $AZ \times TZ \times Pp \div PG$ ad $Mp \times AT$ *cub.* hoc est ut circumferentia *QAqa* ducta in $AZ \times TZ \times Pp \div PG$ ad $2MP \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuatâ Variatio illa menstrua generari posset, est ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $AZ \times TZ \times Pp \div PG$ ad $2ATq$. id est (cum *Pp* sit ad *PG* ut Sinus Inclinationis prædictæ ad Radium, & $AZ \times TZ \div AT$ sit ad ½*AT* ut sinus duplicati anguli *ATn* ad Radium) ut inclinationis ejusdem Sinus ductus in Sinum duplicatæ distantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per Propositionem superiorem) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times Pp \div PG$ ad *AT cub.* id est ut $\{IT \times TG \div AT\} \times \{Pp \div PG\}$ ad *AT*; hoc est ut Sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $Pp \div PG$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est spatio horarum $177^1/_6$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}. seu 5878″½, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $Pp \div PG$ ad summam totidem diametrorum; hoc est ut diameter ducta in $Pp \div$

PG, ad circumferentiam; id est si inclinatio sit 5 *gr*. 2′, ut 7 × $^{876}/_{10000}$ ad 22, seu 279 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est 164″, seu 2′. 44″.

Prop. XXXV. Prob. XV.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Figure for Prop. XXXIV.

Sit *AD* Sinus inclinationis maximæ, & *AB* Sinus Inclinationis minimæ. Bisecetur *BD* in *C*, & centro *C*, intervallo *BC*, describatur Circulus *BGD*. In *AC* capiatur *CE* in ea ratione ad *EB* quam *EB* habet ad 2*BA*: Et si dato tempore constituatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis, & ad *AD* demittatur perpendiculum *GH*: erit *AH* Sinus inclinationis quæsitæ.

Nam *GEq*. æquale est *GHq*. + *HEq*. = *BHD* + *HEq*. = *HBD* + *HEq*. - *BHq*. = *HBD* + *BEq*. - 2*BH* × *BE* = *BEq*. + 2*EC* × *BH* = 2*EC* × *AB* + 2*EC* × *BH* = 2*EC* × *AH*. Ideoque cum 2*EC* detur, est *GEq*. ut *AH*. Designet jam *AEg* distantiam Nodorum à Quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus *Gg*, ob datum angulum *GEg*, erit ut distantia *GE*. Est autem *Hh* ad *Gg* ut *GH* ad *GC*, & propterea *Hh* est ut contentum *GH* × *Gg* seu *GH* × *GE*; id est ut {*GH* ÷ *GE*} × *GE qu*. seu {*GH* ÷ *GE*} × *AH*, id est ut *AH* & sinus anguli *AEG* conjunctim. Igitur si *AH* in casu aliquo sit Sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed *AH* ubi punctum *G* incidit in punctum alterutrum *B* vel *D* huic Sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonstratione supposui angulum *BEG*, qui distantia est Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum *BEG* rectum esse, & *Gg* esse augmentum horarium distantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & inclinationis Variatio horaria (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut contentum sub

inclinationis Sinu *AH* & Sinu anguli recti *BEG*, qui est duplicata distantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum Radii; id est ut mediocris inclinationis Sinus *AH* ad radium quadruplicatum; hoc est (cum inclinatio illa mediocris sit quasi 5 *gr.* 8′½.) ut ejus Sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem Variatio tota, Sinuum differentiæ *BD* respondens, ad variationem illam horariam ut diameter *BD* ad arcum *Gg*; id est ut diameter *BD* ad semicircumferentiam *BGD* & tempus horarum 2080, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est ut 7 ad 11 & 2080 ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota *BD* ad 33″. 10‴. 33^{iv}. ut 224 × 7 × 2080 ad 110000, id est ut 2965 ad 100, & inde Variatio illa *BD* prodibit 16′. 24″.

Hæc est inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, inclinatio major est ubi Luna versatur in Syzygiis, quàm ubi ea versatur in Quadraturis, excessu 2′. 44″; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio 1′. 22″ Variatio tota mediocris *BD* in Quadraturis Lunaribus diminuta fit 15′. 2″, in ipsius autem Syzygiis aucta fit 17′. 46″. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit 17′. 46″. adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit 5 *gr.* 17′. 46″. eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 5 *gr.* Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus. Nam statuunt Astronomi Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Nodi sunt in Quadraturis & Luna in oppositione Solis, esse quasi 5 *gr.* Ubi verò Nodi sunt in Syzygiis, eandem docent esse 5 *gr.* 17′½ vel 5 *gr.* 18′.

Si jam desideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat *AB* ad *AD* ut Sinus 5 *gr.* ad Sinum 5 *gr.* 17′. 46″, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit *AH* Sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatio, ubi Luna distat 90 *gr.* à Nodis. Aliis in Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scholium.

Hactenus de motibus Lunæ quatenus Excentricitas Orbis non consideratur. Similibus computationibus inveni, quod Apogæum ubi in Conjunctione vel Oppositione Solis versatur, progreditur singulis diebus 23′ respectu Fixarum; ubi verò in Quadraturis est, regreditur singulis diebus 16⅓ circiter: quodque ipsius motus medius annuus sit quasi 40 *gr.* Per Tabulas Astronomicas à *Cl. Flamstedio* ad Hypothesin *Horroxii* accommodatas, Apogæum in ipsius Syzygiis progreditur cum motu diurno 24′. 28″, in Quadraturis autem regreditur cum motu diurno 20′. 12″, & motu medio annuo 40 *gr.* 41′ fertur in consequentia. Quod differentia inter motum diurnum progressivum Apogæi in ipsius Syzygiis, & motum diurnum regressivum in ipsius Quadraturis, per Tabulas sit 4′. 16″, per computationem verò nostram 6′⅔, vitio Tabularum tribuendum esse suspicamur. Sed neque computationem nostram satis accuratam esse putamus. Nam rationem quandam ineundo prodiere Apogæi motus diurnus progressivus in ipsius Syzygiis, & motus diurnus regressivus in ipsius Quadraturis, paulo majores. Computationes autem, ut nimis perplexas & approximationibus impeditas, neque satis accuratas, apponere non lubet.

Prop. XXXVI. Prob. XVI.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Figure for Prop. XXXVI.

Solis vis *ML* seu *PS*, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 638092,6. Et vis *SM* - *LM* seu 2*PK* in Syzygiis Lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum à centro Terræ, id est in ratione 60½ ad 1; adeoque vis prior in superficie Terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 *gr.* distant à Sole. Vi alterâ quæ duplo major est Mare elevatur, & sub Sole & in regione Soli opposita. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 *gr.* distant à Sole, sive

elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac si tota in regionibus sub Sole & Soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 *gr.* distant à Sole nil ageret.

Corol. Hinc cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 291, efficiat ut altitudo Aquæ sub Æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum Parisiensium 85200, vis Solaris, de qua egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12868200 seu 1 ad 44221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub Sole & Soli oppositis superet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus distant à Sole, mensura tantum pedis unius Parisiensis & digitorum undecim. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85200 ut 1 ad 44221.

Prop. XXXVII. Prob. XVII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ*, ad lapidem tertium infra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in Conjunctione & Oppositione Luminarium (observante *Samuele Sturmio*) est pedum plus minus 45, in Quadraturis autem est pedum tantum 25: Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore versantium & mediocriter à Terra distantium, sunto vires S & L. Et quoniam Luna in Quadraturis, tempore verno & autumnali extra Æquatorem in declinatione graduum plus minus 23½ versatur, & Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad mare movendum minor sit, idque (quantum sentio) in duplicata ratione Sinus complementi declinationis quam proximè, vis Lunæ in Quadraturis, (cum sinus ille sit ad radium ut 91706 ad 100000) erit ${}^{841}/_{1000}\,L$, & summa virium in Syzygiis erit $L + S$, ac differentia in Quadraturis ${}^{841}/_{1000}\,L - S$, adeoque $L + S$ erit ad ${}^{841}/_{1000}\,L - S$ ut 45 ad 25 seu 9 ad 5, & inde $5L + 5S$ æqualis erit ${}^{7569}/_{1000}\,L - 9S$, & $14S$ æqualis ${}^{2569}/_{1000}\,L$, & propterea L ad S ut 14000 ad 2569 seu $5\,{}^{7}/_{15}$ ad 1. In Portu *Plymuthi* æstus maris (ex observatione *Samuelis*

Colepressi) ad pedes plus minus sexdecim, altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æstus in Syzygiis Lunæ superare potest altitudinem ejus in Quadraturis pedibus septem vel octo. Si excessus mediocris his temporibus sit pedum septem cum dimidio; æstus in Syzygiis ascendet ad pedes 19¾, in Quadraturis ad pedes 12¼, & sic $L + S$ erit ad $^{841}/_{1000}$ L - S ut 19¾ ad 12¼, & inde L ad S ut 734 ad 100 seu 7⅓ ad 1. Est igitur vis Lunæ ad vim Solis per computationem priorem ut $5^7/_{15}$ ad 1, per posteriorem ut 7⅓ ad 1. Donec aliquid certius ex Observationibus accuratius institutis constiterit, usurpabimus proportionem mediocrem 6⅓ ad 1. Unde cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821.

Corol. 1. Igitur cum aqua vi Solis agitata ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum ascendat, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem pedum duodecim. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem latè patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, ascensus aquæ intra Tropicos minor est quàm in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africam* & Australem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit ascendere nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in Insulis, quæ à littoribus longissimè absunt, perexiguus esset solet. In Portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus sunt solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa Milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40 vel 50 & amplius. Et par est ratio

fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2031821, perspicuum est quod vis illa sit longè minor quàm quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut 6⅓ ad 1, & vires illæ sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; erit densitas Lunæ ad densitatem Solis ut 6⅓ ad 1 directè & cubus diametri Solis ad cubum diametri Lunæ inversè, id est (cum diametri mediocres apparentes Solis & Lunæ sint 31′. 27″. & 32′. 12″.) ut 34 ad 5. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 100 ad 387, & propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 600 ad 387, seu 9 ad 5 quam proximè. Est igitur corpus Lunæ densius & magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Unde cum vera diameter Lunæ sit ad veram diametrum Terræ ut 1 ad 3,6½, erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 26 quam proximè.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ, erit quasi duplo minor quàm gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Prop. XXXVIII. Prob. XVIII.

Invenire figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, esset ad vim Lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub Luna & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id est ut 26 ad 1 & 5 ad 18 conjunctim seu 65 ad 9. Unde cum mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes duodecim,

fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere nonaginta. Eaque de causa figura Lunæ Sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem superius allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

Lemma I.

Figure for Lemma I.

Si APEp *Terram designet uniformiter densam, centroque* C *& polis* P*,* p *& æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Pape*; sit autem* QR *planum, cui recta à centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terræ totius exterioris* PapAPepE*, quæ Sphærâ modò descriptâ altior est, particulæ singulæ conantur recedere hinc inde à plano* QR*, sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: erit vis & efficacia tota particularum omnium, ad Terram circulariter movendam, quadruplo minor quàm vis tota particularum totidem in Æquatoris circulo* AE*, uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam. Et motus iste circularis circa axem in plano* QR *jacentem, & axi* Pp *perpendiculariter insistentem, peragetur.*

Sit enim *IK* circulus minor Æquatori *AE* parallelus, sitque *L* particula Terræ in circulo illo extra globum *Pape* sita. Et si in planum *QR* demittatur perpendiculum *LM*, vis tota particulæ illius ad Terram circa ipsius centrum convertendum proportionalis erit eidem *LM*: & si hæc vis *LM* (per Legum Corol. 2.) distinguatur in vires *LN*, *NM*; efficacia virium *MN* particularum omnium *L*, in circuitu Terræ totius

extra globum *Pape* consistentium, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem literarum *ApEP* convertendam, erit ad efficaciam virium *LN* particularum omnium *L*, ad Terram circa ipsius centrum secundum ordinem contrarium earundem literarum convertendam, ut tria ad duo. Ideoque efficacia virium omnium *MN* erit ad excessum efficaciæ hujus supra efficaciam virium omnium *LN* ut tria ad unum. Et si particulæ illæ omnes locarentur in Æquatore, efficacia virium omnium *LN* evanesceret, & efficacia virium omnium *MN* augeretur in ratione quatuor ad tria. Quare excessus ille, qui est efficacia absoluta particularum in locis propriis, est pars quarta efficaciæ particularum earundem in Æquatore. Motus autem æquinoctiorum est ut hæc efficacia. Singula examinet qui volet. Brevitati consulo.

Lemma II.

Motus autem Terræ totius circa axem illum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli circa axem eundem, in ratione composita ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque, ad duo quadrata ex diametro; id est in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 & 1000000.

Est enim motus Cylindri circa axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circa axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circa diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

Lemma III.

Si annulus, Terra omni reliqua sublata, solus in orbe Terræ motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum 23½ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum

Æquinoctialium sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.

Prop. XXXIX. Prob. XIX.

Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadraturis, erat 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. & hujus dimidium 8″. 17‴. 38^{iv}. 18^{v}. (ob rationes & supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto sidereo 20 *gr.* 11′. 46″. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim 20 *gr.* 11′. 46″. in antecedentia; & si plures essent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent reciprocè ut tempora periodica; & propterea si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad 20 *gr.* 11′. 46″. ut dies sidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuò non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Figure for Prop. XXXIX.

Fingamus igitur quod annulus iste quoad quantitatem materiæ æqualis sit Terræ omni *PapAPepE*, quæ globo *PapE* superior est; & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut *aC qu.* ad *AC qu.* - *aC qu.* id est (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* sit ad diametrum majorem *AC* ut 689 ad 692) ut 4143 ad 474721 seu 1000 ad 114585; si annulus iste Terram secundum æquatorem cingeret, & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. II.) ut 4143 ad 474721 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est ut 4143 ad 439248: ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli & globi, ut 4143 ad 443991. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius Nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum

priorem ut 4143 ad 443391; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex globo & annulo compositi, ad motum 20 *gr.* 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4143 ad 443391 conjunctim, id est ut 1 ad 2932. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeò quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3*IT*, *in Fig. pag. 444.*) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. I.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet quadruplo minor quàm prius. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad 20 *gr.* 11′. 46″. ut 1 ad 11728, ac proinde fieret 6″. 12‴. 2^{iv}. Hæc est præcessio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda. Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis ut 6⅓ ad 1, & hæc vis pro quantitate sua augebit etiam præcessionem Æquinoctiorum. Ideoque præcessio illa ex utraque causa oriunda jam fiet major in ratione 7⅓ ad 1, & sic erit 45″. 24‴. 15^{iv}. Hic est motus punctorum æquinoctialium ab actionibus Solis & Lunæ in partes Terræ, quæ globo *Pape* incumbunt, oriundus. Nam Terra ab actionibus illis in globum ipsum exercitis nullam in partem inclinari potest.

Figure for Prop. XXXIX.

Designet jam *APEp* corpus Terræ figurâ Ellipticâ præditum, & ex uniformi materiâ constans. Et si distinguatur idem in figuras innumeras Ellipticas concentricas & consimiles, *APEp*, *BQbq*, *CRcr*, *DSds*, &c. quarum diametri sint in progressione Geometrica: quoniam figuræ consimiles sunt, vires Solis & Lunæ, quibus puncta æquinoctialia regrediuntur, efficerent ut figurarum reliquarum seorsim spectatarum puncta eadem æquinoctialia eadem cum velocitate regrederentur. Et par est ratio motus orbium singulorum *AQEq*, *BRbr*, *CScs*, &c. qui sunt figurarum illarum differentiæ. Orbis uniuscujusque, si solus esset, puncta æquinoctialia eadem cum velocitate regredi deberent. Nec refert utrum orbis quilibet densior sit an rarior, si modò ex materia uniformiter densa confletur. Unde

etiam si orbes ad centrum densiores sint quàm ad circumferentiam, idem erit motus æquinoctiorum Terræ totius ac prius; si modo orbis unusquisque seorsim spectatus ex materia uniformiter densa constet, & figura orbis non mutetur. Quod si figuræ orbium mutentur, Terraque ad æquatorem *AE*, ob densitatem materiæ ad centrum, jam altius ascendat quàm prius; regressus æquinoctiorum ex aucta altitudine augebitur, idque in orbibus singulis seorsim existentibus, in ratione majoris altitudinis materiæ juxta orbis illius æquatorem; in Terra autem tota in ratione majoris altitudinis materiæ juxta æquatorem orbis non extimi *AQEq*, non intimi *Gg*, sed mediocris alicujus *CScs*. Terram autem ad centrum densiorem esse, & propterea sub Æquatore altiorem esse quàm ad polos in majore ratione quàm 692 ad 689, in superioribus insinuavimus. Et ratio majoris altitudinis colligi ferè potest ex majore diminutione gravitatis sub æquatore, quàm quæ ex ratione 692 ad 689 consequi debeat. Excessus longitudinis penduli, quod in Insula *Goree* & in illâ *Cayennæ* minutis singulis secundis oscillatur, supra longitudinem Penduli quod *Parisiis* eodem tempore oscillatur, à *Gallis* inventi sunt pars decima & pars octava digiti, qui tamen ex proportione 692 ad 689 prodiere $^{81}/_{1000}$ & $^{89}/_{1000}$. Major est itaque longitudo Penduli *Cayennæ* quàm oportet, in ratione ⅛ ad $^{89}/_{1000}$, seu 1000 ad 712; & in Insula *Goree* in ratione $^{1}/_{10}$ ad $^{81}/_{1000}$ seu 1000 ad 810. Si sumamus rationem mediocrem 1000 ad 760; minuenda erit gravitas Terræ ad æquatorem, & ibidem augenda ejus altitudo, in ratione 1000 ad 760 quam proximè. Unde motus æquinoctiorum (ut supra dictum est) auctus in ratione altitudinis Terræ, non ad orbem extimum, non ad intimum, sed ad intermedium aliquem, id est, non in ratione maxima 1000 ad 760, non in minima 1000 ad 1000, sed in mediocri aliqua, puta 10 ad 8⅓ vel 6 ad 5, evadet annuatim 54″. 29‴. 6^{iv}.

Rursus hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Nam distantia particulæ cujusque terrestris à plano *QR*, quo tempore particula illa à plano Eclipticæ longissimè distat, in Tropico suo (ut ita dicam) consistens, diminuitur, per inclinationem planorum Eclipticæ & Æquatoris ad invicem, in ratione Sinus complementi inclinationis ad Radium. Et in ratione distantiæ illius diminuitur etiam vis particulæ ad æquinoctia movenda. In eadem quoque ratione diminuitur summa virium particulæ ejusdem, in locis hinc inde à Tropico æqualiter distantibus:

uti ex prædemonstratis facilè ostendi possit: & propterea vis tota particulæ illius, in revolutione integrâ, ad æquinoctia movenda, ut & vis tota particularum omnium, & motus æquinoctiorum à vi illa oriundus, diminuitur in eadem ratione. Igitur cum inclinatio illa sit 23½ *gr*. diminuendus est motus 54″. 29‴. in ratione Sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum 23½) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet 49″. 58‴. Regrediuntur igitur puncta æquinoctiorum motu annuo (juxta computationem nostram) 49″. 58″′, fere ut Phænomena cœlestia requirunt. Nam regressus ille annuus ex observationibus Astronomorum est 50″.

Descripsimus jam Systema Solis, Terræ & Planetarum: superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

Lemma IV.

Cometas esse Lunâ superiores & in regione Planetarum versari.

Figure for Lemma IV.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem, at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs moveri videntur, nunc verò celeriùs. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto Aries*QA*, Aries*QB*, Aries*QC* observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque Aries*QF* longitudo

ultimò observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut sit *AG* ad *AB* ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur *QG*. Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus Aries*QG* longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo *AQG*, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ meritò Figure for Lemma IV. habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia verò Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet *S* Solem, *acT* Orbem magnum, *a* locum Terræ in observatione prima, *c* locum Terræ in observatione secunda, *T* locum Terræ in observatione ultima, & *T*Aries lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus Aries*TV* æqualis angulo Aries*QF*, hoc est æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut sit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur *g*Aries ipsi *T*Aries parallela, & capiatur angulus Aries*gV* angulo Aries*QG* æqualis, erit hic angulus Aries*gV* æqualis longitudini Cometæ è loco *g* spectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à translatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe Jovis inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus

quantitas meo computo collocavit disparentes Cometas satis longè infra Jovem. Unde consequens est quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directè & ratione dimidiata lucis ad lucem inversè. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum à *Cl. Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis superabit caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantiæ Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad √4 inversè, & 12″ ad 30″ directè, id est ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprili*, ut Author est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter Capillitii Cometarum rarò superet 8′ vel 12′, diameter verò Nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel fortè decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum

prope ablegant: qua certè ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quàm Planetæ, qui hic sunt, illustrantur à Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis à se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus à Capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quàm capillitii ad Nucleum capitis. Igitur si imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra discum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illustrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum à Terra Solem versus, ac decrescente in eorum recessu à Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (observante *Hevelio*,) ex quo conspici cæpit, remittebat semper de motu suo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum Cometa radiis Solaribus obtectus desiit apparere. Cometa Anni 1683, observante eodem *Hevelio*, in fine Mensis *Julii* ubi primum conspectus est, tardissimè movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept. 4.* quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug. 6.* esse tantum 6′. 5″ inclusâ comâ, at *Sept. 2.* esse 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine

motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis *Decembris*, & iste Anni 1680 circa finem ejusdem Mensis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modò exierant de radiis Solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decem. 1.* majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decem. 16.* (jam in Perigæo existens) magnitudine parùm, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan. 7. Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decem. 15 & 17* apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentum. *Decem. 26.* velocissimè motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan. 3.* apparebat ut Stella quartæ, *Jan. 9.* ut Stella quintæ, *Jan. 13.* ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan. 25.* vix æquabat Stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maximè splenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ vicinioris qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quàm in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt,

neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longè major sita est à latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos etiam contra cursum Planetarum diutissimè conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

Prop. XL. Theor. XXI.

> *Cometas in Sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.*

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt, orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in ratione sesquialtera transversorum axium. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis Cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ absque erroribus sensibilibus adhiberi possunt.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis erit semper ad velocitatem Planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicatæ distantiæ Cometæ à centro Solis ad distantiam Planetæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum transversam, esse partium 100000000, & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes 71675½. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes 101364½. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione distantiarum respectivè, ideoque datur.

Lemma V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Figure for Lemma V.

Cas. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia sunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK* &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. secundas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias *d*, 2*d*, 3*d*, &c. id est, ita ut sit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$ &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic est *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, &c. unitates esse, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo signa negativa

terminis *HS*, *IS*, &c. qui jacent ad partes puncti *S* versus *A*, & signa affirmativa terminis *SK*, *SL*, &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et signis probe observatis erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ &c.

Cas. 2. Quod si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, &c. inæqualia sint intervalla *HI*, *IK*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; secundas per intervalla bina divisas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna divisas e, $2e$, &c. & sic deinceps; id est ita ut sit $b = \{AH - BI\} \div HI$, $2b = \{BI - CK\} \div IK$, $3b = \{CK - DL\} \div KL$ &c. dein $c = \{b - 2b\} \div HK$, $2c = \{2b - 3b\} \div IL$, $3c = \{3b - 4b\} \div KM$ &c. Postea $d = \{c - 2c\} \div HL$, $2d = \{2c - 3c\} \div IM$ &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $- HS = p$, p in $- IS = q$, q in $+ SK = r$, r in $+ SL = s$, s in $+ SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum *ME*, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proximè cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per Methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

Lemma VI.

Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter observationes, (*in Fig. præced.*) *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME*, observatas quinque longitudines Cometæ, *HS* tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata *RS*, erit *RS* longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes

quinque adhiberi.

Lemma VII.

Figure for Lemma VII.

Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC*, cujus partes* PB*,* PC*, rectis duabus positione datis* AB*,* AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*.   *Q. E. F.*

Lemma VIII.

Sit ABC *Parabola umbilicum habens* S*. Chordâ* AC *bisectâ in* I *abscindatur segmentum* ABCI*, cujus diameter sit* Iμ *& vertex* μ*. In* Iμ *productâ capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ*. Jungatur* OS*, & producatur ea ad* ξ*, ut sit* Sξ *æqualis* 2SO*. Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA*, & agatur* ξB *secans* AC *in* E*: dico quod punctum* E *abscindet de chorda* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Figure for Lemma VIII.

Jungatur enim *EO* secans arcum Parabolicum *ABC* in *Y*, & erit area curvilinea *AEY* ad aream curvilineam *ACY* ut *AE* ad *AC* quamproximè. Ideoque cum triangulum *ASE* sit ad triangulum *ASC* in eadem ratione, erit area tota *ASEY* ad aream totam *ASCY* ut *AE* ad *AC* quamproximè. Cum autem ξ*O* sit ad *SO* ut 3 ad 1 & *EO* ad *YO* prope in eadem ratione, erit *SY* ipsi *EB* parallela quamproximè, & propterea triangulum *SEB*, triangulo *YEB* quamproximè æquale. Unde si ad aream *ASEY* addatur triangulum *EYB*, & de summa auferatur triangulum *SEB*, manebit area *ASBY* areæ *ASEY* æqualis quamproximè, atque adeo ad aream *ASCY* ut *AE* ad *AC*. Sed area *ASBY* est ad aream *ASCY* ut tempus descripti arcus *AB* ad tempus

descripti arcus totius. Ideoque *AE* est ad *AC* in ratione temporum quamproximè. *Q. E. D.*

Lemma IX.

Rectæ Iμ *&* μM *& longitudo* AIC ÷ 4Sμ *æquantur inter se. Nam* 4Sμ *est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem* B.

Lemma X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P*, ut* μN *sit pars tertia ipsius* μI*, &* SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ*. Cometa quo tempore describit arcum* AμC*, si progrederetur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrediatur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam Radio ad punctum *S* ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolicæ *ASC*μ. Ideoque contentum sub longitudine in Tangente descripta & longitudine *S*μ, esset ad contentum sub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*μ ad triangulum *ASCM*, id est ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* est ad longitudinem in tangente descriptam ut *S*μ ad *SN*. Cum autem velocitas Cometæ in altitudine *SP* sit ad velocitatem in altitudine *S*μ in dimidiata ratione *SP* ad *S*μ inversè, id est in ratione *S*μ ad *SN*, longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in Tangente descriptam ut *S*μ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate descripta, cum sint ad longitudinem in Tangente descriptam in eadem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine *S*μ + ⅔*I*μ, eodem tempore describeret chordam *AC* quamproximè.

Lemma XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *seu* Sμ + ⅓Iμ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea semper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem qua urgetur sub initio; idem tempore in orbe suo describat arcum* AC*, descensu suo describeret spatium longitudini* Iμ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore describat arcum Parabolicum *AC*, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine *SP* (per Lemma novissimum) describet chordam *AC*, adeoque eodem tempore in circulo cujus semidiameter esset *SP* revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam *AC* in dimidiata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine *SP*, cadendo de altitudine illa in Solem, describeret eodem tempore (per Scholium Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis *SP*, id est spatium *AIq.* ÷ 4*SP*. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine *SN* sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine *SP*, ut *SP* ad *S*μ: Cometa pondere quod habet in altitudine *SN* eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium *AIq.* ÷ 4*S*μ, id est spatium longitudini *I*μ vel *M*μ æquale. *Q. E. D.*

Prop. XLI. Prob. XX.

> *Cometæ in Parabola moventis Trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.*

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggressus, composui Problemata quædam in Libro primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulò simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus Cometæ locus per Lemma sextum.

Figure for Lemma VIII.

Designent *S* Solem, *T*, *t*, ᴛ tria loca Terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, ᴛ*C* observatas tres longitudines Cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, *X* longitudinem quam Cometa toto illo tempore ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distantia, describere posset, & *tV* perpendiculum in chordam *T*ᴛ. In longitudine media *tB* sumatur utcunque punctum *B*, & inde versus Solem *S* ducatur linea *BE*, quæ

sit ad Sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St* quadrato ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium *tB*. Et per punctum *E* agatur recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC* ad rectas *TA* & τ*C* terminatæ, sint ad invicem ut tempora *V* & *W*: Tum per puncta *A*, *B*, *C*, duc circumferentiam circuli, eamque biseca in *i*, ut & chordam *AC* in *I*. Age occultam *Si* secantem *AC* in λ, & comple parallelogrammum *iI*λμ. Cape *I*σ æqualem 3*I*λ, & per Solem *S* age occultam σξ æqualem 3*S*σ + 3*i*λ. Et deletis jam literis *A*, *E*, *C*, *I*, à puncto *B* versus punctum ξ duc occultam novam *BE*, quæ sit ad priorem *BE* in duplicata ratione distantiæ *BS* ad quantitatem *S*μ + ⅓*i*λ. Et per punctum *E* iterum duc rectam *AEC* eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes *AE* & *EC* sint ad invicem ut tempora inter observationes, *V* & *W*.

Ad *AC* bisectam in *I* erigantur perpendicula *AM*, *CN*, *IO*, quarum *AM* & *CN* sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios *TA* & τα. Jungatur *MN* secans *IO* in *O*. Constituatur rectangulum *iI*λμ ut prius. In *IA* producta capiatur *ID* æqualis *S*μ + ⅔*i*λ, & agatur occulta *OD*. Deinde in *MN* versus *N* capiatur *MP*, quæ sit ad longitudinem supra inventam *X* in dimidiata ratione mediocris distantiæ Telluris à Sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam *OD*. Et in *AC* capiatur *CG* ipsi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad easdem partes rectæ *NC* jaceant.

Eadem methodo qua puncta *E*, *A*, *C*, *G*, ex assumpto puncto *B* inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis *b* & β puncta nova *e*, *a*, *c*, *g*, & ε, α, κ, γ. Deinde si per *G*, *g*, γ ducatur circumferentia circuli *Gg*γ secans rectam τ*C* in *Z*: erit *Z* locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et si in *AC*, *ac*, ακ capiantur *AF*, *af*, αφ ipsis *CG*, *cg*, κγ respectivè æquales, & per puncta *F*, *f*, φ ducatur circumferentia circuli *Ff*φ secans rectam *AT* in *X*; erit punctum *X* alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta *X* & *Z* erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios *TX* & τ*Z*; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico *S*, per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

Constructionis hujus demonstratio ex Lemmatibus consequitur: quippe cum recta *AC* secetur in *E* in ratione temporum, per Lemma VIII: & *BE* per Lem. XI. sit pars rectæ *BS* in plano Eclipticæ arcui *ABC* & chordæ *AEG* interjecta; & *MP* (per Lem. VIII.) longitudo sit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter observationem primam ac

tertiam describere debet, ideoque ipsi *MN* æqualis fuerit, si modò *B* sit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterum puncta *B*, *b*, β non quælibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus *AQt* in quo vestigium orbis in plano Eclipticæ descriptum secabit rectam *tB* præterpropter innotescat, in angulo illo ducenda erit recta occulta *AC*, quæ sit ad $^4/_3$*Tt* in dimidiata ratione *St* ad *SQ*. Et agendo rectam *SEB* cujus pars *EB* æquetur longitudini *Vt*, determinabitur punctum *B* quod prima vice usurpare licet. Tum rectâ *AC* deletâ & secundum præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, ea lege, ut si *TA*, *TC* se mutuò secuerint in *Y*, sit distantia *Yb* ad distantiam *YB* in ratione composita ex ratione *MN* ad *MP* & ratione dimidiata *SB* ad *Sb*. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β; si modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia *Bb* perexigua obvenerit, postquam inventa sunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*, actæ rectæ *Ff* & *Gg*, secabunt *TA* & τ*C* in punctis quæsitis *X* & *Z*.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

[illegible]	
1680 *December*	[illegible] Capricorni [illegible]
	Aquarii [illegible]
	[illegible]
	[illegible]
	Piscium [illegible]
	[illegible]
1681 *January*	Arietis [illegible]
	Aquarii [illegible]
	[illegible]
	[illegible]
	Tauri [illegible]
	Tauri [illegible]
February	[illegible]
	[illegible]

In his observationibus *Flamstedius* eâ usus est diligentiâ, ut postquam bis observasset distantiam Cometæ à Stella aliqua fixa, deinde etiam distantiam bis ab alia stella fixa, rediret ad stellam priorem & distantiam Cometæ ab eadem iterum observaret, idque bis, ac deinde ex distantiæ illius incremento vel decremento tempori proportionali colligeret distantiam tempore intermedio, quando distantia à stella altera observabatur. Ex hujusmodi observationibus loca Cometæ festinanter computata *Flamstedius* primò cum amicis communicavit, & postea easdem ad examen revocatas calculo diligentiore correxit. Nos loca correcta hic descripsimus.

His adde observationes quasdam è nostris.

Tempus	Cometæ Longit.	Cometæ Lat.
26. *Febr.* [illegible]	Tauri [illegible]	[illegible]
27. [illegible]	[illegible]	[illegible]
27. *Mart.* [illegible]	[illegible]	[illegible]
28. [illegible]	[illegible]	[illegible]
29. [illegible]	[illegible]	[illegible]
0. [illegible]	Geminorum [illegible]	[illegible]

Hæ observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filisque in foco Telescopii locatis paractæ sunt: quibus instrumentis & positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* ο) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium 52¼, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* 23⅔, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* 57½, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AK* 38⅔, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* 36¼, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $53\frac{5}{11}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* 31⅓, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Figure for Exemplum.

Die Veneris *Feb. 25.* St. vet. Hor. 8½ P.M. Cometæ in *p* existentis distantia à stella *E* erat major quàm $\frac{3}{13}$ *AE*, minor quàm $\frac{1}{5}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{3}{14}$ *AE* proximè; & angulus *ApE* nonnihil obtusus

erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantia Cometæ à perpendiculo illo erat $^1/_5$ *pE*.

Eadem nocte, horâ 9½, Cometæ in *P* existentis distantia à stella *E* erat major quàm {1 ÷ 4½} *AE*, minor quàm {1 ÷ 5¼} *AE*, adeoque æqualis {1 ÷ 4⅞} *AE*, seu $^8/_{39}$ *AE* quamproximè. A perpendiculo autem à Stella *A* ad rectam *PE* demisso distantia Cometæ erat $^4/_5$ *PE*.

Die Mar^{tis}, *Mart. 1*, hor. 11. P.M. Cometa in *R* existens, stellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quàm ⅓ *CK*, & paulo minor quam ⅓ *CK* + ⅛ *CR*, adeoque æqualis ⅓ *CK* + $^1/_{16}$ *CR* seu $^{16}/_{45}$ *CK*.

Figure for Exemplum.

Die Mercur^{ii}, *Mart. 2*. hor. 8. P.M. Cometæ existentis in *S*, distantia à stella *C* erat $^4/_9$ *FC* quamproximè. Distantia stellæ *F* à recta *CS* producta erat $^1/_{24}$ *FC*; & distantia stellæ *B* ab eadem recta erat quintuplo major quàm distantia stellæ *F*. Item recta *NS* producta transibat inter stellas *H* & *I*, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ *H* quàm stellæ *I*.

Die Satur^{ni}, *Mart. 5*. hor. 11½. P.M. Cometa existente in *T*, recta *MT* æqualis erat ½*ML*, & recta *LT* producta transibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quàm *B*, auferens à *BF* quintam vel sextam ejus partem versus *F*. Et *MT* producta transibat extra spatium *BF* ad partes stellæ *B*, quadruplo propior existens stellæ *B* quam stellæ *F*. Erat *M* stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & *L* stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum *A* & *B* distantia esset 2 *gr.* 6$^4/_5$, & stellæ *A* longitudo Tauri 26 *gr.* 41′. 48″ & latitudo borealis 12 *gr.* 8′½, stellæque *B* longitudo Tauri 28 *gr.* 40′. 16″. & latitudo borealis 11 *gr.* 17$^1/_5$; quemadmodum à *Flamstedio* observatas accepi) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre constructâ usus sum, sed Longitudinum tamen & Latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultimâ *Mart. 9*. ubi positiones fixarum ad stellas *A* & *B* minus accuratè determinare potui. *Cassinus* qui Cometam eodem tempore observavit,

se declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivisse fassus est. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter deflectere cæpit boream versus, à parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec. 21*, *Jan. 5*, & *Jan. 25*. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, *S*μ 9503, *i*λ = 413: *BE* secunda vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* - 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & τ*Z* 11322. Ex quibus orbem definiendo inveni Nodos ejus in Cancris & Capricorni 1 *gr.* 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 *gr.* 20⅓; verticem ejus (seu perihelium Cometæ) in Sagittarii 27 *gr.* 43′ cum latitudine australi 7 *gr.* 34′; & ejus latus rectum 236,8, areamq; radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585; Cometam verò *Decemb.* 8 *d.* 0 *h.* 4′. P.M. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula Sinuum naturalium collectas determinavi graphicè; construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16⅓ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

Cometæ	Dist. Cometæ à Sole	Long. Comp.	Lat. Comp.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
Decemb. 12	2792	Capricorni 6.32	[illegible]	[illegible]	8.26	- 2	[illegible]
29	8403	Piscium 13.13⅔	[illegible]	[illegible]	28.10 1/12	+ 2	[illegible]
Febr. 5	16669	Tauri [illegible]	[illegible]	16.59⅞	15.27⅖	0	[illegible]
Mar. 5	21737	Tauri 29.19¾	[illegible]	29.20 6/7	[illegible]	- 1	[illegible]

Præterea cum *Cl. Flamstedius* Cometam, qui Mense *Novembri* apparuerat, eundem esse cum Cometa mensium subsequentium,

literis ad me datis aliquando disputaret, & Trajectoriam quamdam ab orbe hocce Parabolico non longe aberrantem delinearet, visum est loca Cometæ in hoc orbe Mense *Novembri* computare, & cum Observationis conferre. Observationes ita se habent.

Nov. 17. St. Vet. *Ponthœus* & alii hora sexta matutina *Romæ*, (id est hora 5. 10′ *Londini*) Cometam observarunt in Libræ 8 *gr.* 30′ cum latitudine Australi 0 *gr.* 40′. Extant autem eorum observationes in tractatu quem *Ponthœus* de hoc Cometa in lucem edidit. Eadem horâ *Galletius* etiam *Romæ*, Cometam vidit in Libræ 8 *gr.* sine Latitudine.

Nov. 18. *Ponthœus* & Socii horâ matutinâ 6, 30′ *Romæ* (*i. e.* hor. 5. 40′ *Londini*) Cometam viderunt in Libræ 13½ cum Lat. Austr. 1 *gr.* 20′. Eodem die *R. P. Ango* in Academia *Flechensi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ, Cometam vidit in medio Stellarum duarum parvarum, quarum una media est trium in recta linea in Virginis Australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in Libræ 12 *gr.* 46′ cum Lat. Austr. 50′. Eodem die *Bostoniæ* in *Nova Anglia* in Lat. 42⅓, horâ quintâ matutinâ (id est *Londini* hora Mat. 9⅔) Cometa visus est in Libræ 14 circiter, cum Lat. Austr. 1 *gr.* 30′; uti à *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora Mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (observante juvene quodam) distabat à Spica Virginis quasi 2 *gr.* Boreazephyrum versus. Eodem die hor. 5. Mat. *Bostoniæ* in *Nova-Anglia* Cometa distabat à Spica Virginis gradu uno, differentiâ latitudinum existente 40′, atque adeo differentia Long. 44′ circiter. Unde Cometa erat in Libræ 18 *gr.* 40′ cum Lat. Austr. 1 *gr.* 19′. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent* prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in Confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ *gr.* horâ quintâ matutinâ (id est horâ 10ª *Londini*) Cometam vidit supra Spicam Virginis, & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi ¾ *gr.* Observator idem, eadem horà diei sequentis, Cometam vidit quasi 2 *gr.* inferiorem Spicâ. Congruent hæ observationes cum observationibus in *Nova Anglia* factis, si modò distantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore superior esset Spica Virginis altitudine 52′ circiter, ac die posteriore inferior eadem stellâ altitudine perpendiculari 2 *gr.* 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta

Matutina, *Venetiis* (id est hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in Libræ 23 *gr.* cum Lat. Austr. 1 *gr.* 30′. Eodem die *Bostoniæ* distabat Cometa à Spica Virginis, 4 *gr.* longitudinis in orientem, adeoque erat in Libræ 23 *gr.* 24 circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & Socii hor. mat. 7¼ Cometam observarunt in Libræ 27 *gr.* 50′ cum Latitudine Australi 1 *gr.* 16′. *Ango* horâ quintâ mat. in Libræ 27 *gr.* 45′. *Montenarus* in Libræ 27 *gr.* 51′. Eodem die in Insulâ *Jamaicâ* visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id est 1 *gr.* 59′.

Novem. 22. Visus est à *Montenaro* in Scorpii 2°. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ Angliâ* apparuit in Scorpii 3 *gr.* circiter, eadem fere cum latitudine ac prius.

Deinde visus est à *Montenaro Novem. 24.* in Scorpii 12 *gr.* 52′. & *Nov. 25.* in Scorpii 17 *gr.* 45′. Latitudinem *Galletius* jam ponit 2 *gr.* Eandem *Ponthæus* & *Galletius* decrevisse, *Montenarus* & *Ango* semper crevisse testantur. Crassæ sunt horum omnium observationes, sed eæ *Montenari*, *Angonis* & observatoris in *Nova-Anglia* præferendæ videntur. Ex omnibus autem inter se collatis, & ad meridianum *Londini*, hora mat. 5. 10′ reductis, colligo Cometam hujusmodi cursum quamproximè descripsisse.

	Long. Com.	Latit. Com.
Nov. 17	Libræ 8. 10	0. 45 Austr.
18	12. 52	1. 2
19	17. 48	1. 18
20	22. 45	1. 32
21	27. 46	1. 44
22	Scorpii 2. 48	1. 55
23	7. 50	2. 4
24	12. 52	2. 12
25	17. 45	2. 18

Loca autem Cometæ iisdem horis in orbe Parabolico inventa ita se habent.

	Comet. Lon.	Comet. Lat.
Nov. 17	Libræ 8. 31	0. 43
21	Libræ 22. 20	1. 28
25	Scorpii 18. 6	2. 16

Congruunt igitur observationes tam mense *Novembri*, quam mensibus tribus subsequentibus cum motu Cometæ circa Solem in Trajectoriâ hacce Parabolicâ, atque adeo hanc esse veram hujus Cometæ Trajectoriam confirmant. Nam differentia inter loca observata & loca computata tam ex erroribus observationum quam ex erroribus operationum Graphicarum in Orbe definiendo admissis, facilè oriri potuere.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano Trajectoriæ opticè delineatas exhibere: observationibus sequentibus in cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov. 18.* cauda 30 *gr.* longa, Solique directe opposita in *Nova Anglia* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam Martem, qui tunc erat in Virginis 9 *gr.* 54′. *Nov. 19* in *Mary-Land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec. 10.* cauda (observante *Flamstedio*) transibat per medium distantiæ inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in Aquilæ australi ala, & desinebat prope stellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in Capricorni 19½ cum lat. bor. 34¼ *gr.* circiter. *Dec. 11.* surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero*, α, β,) desinens in Capricorni 26 *gr.* 43′ cum lat. bor. 38 *gr.* 34′. *Dec. 12.* transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in Aquarii 4°, cum lat. bor. 42½ circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec. 12.* hora 5, 40′ *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra cygni Uropygium ad *gr.* 10. sese extulit; atque ab hac stella ejus latus ad occasum & boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus *gr.* 3. juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à Stella illa 2 *gr.* 15′ austrum versus, & terminus superior erat in Piscium 22 *gr.* cum lat. bor. 61 *gr.* *Dec. 21.* surgebat fere ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans à β & *Schedir*, & distantiam ab utraque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque desinens in Piscium 24 *gr.* cum lat. 47½ *gr.* *Dec. 29.* tangebat *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54 *gr.* adeoque desinebat in Tauri 19 *gr.* cum lat. 35. *gr.* *Jan. 5.* tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat 40 *gr.*; curva autem erat & convexo

latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 grad. & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan. 13.* Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol,* & luce tenuissima desinebat è regione stellæ κ in latere *Persei.* Distantia termini caudæ à circulo Solem & Cometam jungente erat 3 *gr.* 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum 8½ *gr. Jan. 25 & 26* luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accuratè, adeoque declinabat ab oppositione Solis Boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb. 10.* caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthœus* autem *Feb. 7.* se caudam ad longitudinem *gr.* 12. vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à Sole. Ideoque cum distantia Cometæ à Sole *Dec. 8.* ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quàm calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem; ut expertus sum: & calor ferri candentis (si rectè conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio versantem ex radiis Solaribus concipere posset; quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio

horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio Caloris ob causas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porrò notandum est quod Cometa Mense *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quàm antea Mense *Novembri*; ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è Cometis oriuntur, statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu Nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex est opinio, eas vel jubar esse Solis per translucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem esse seu vaporem à capite Cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes à Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem semper volitantibus: adeoque in aere fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aere clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem absque materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum distinctè ad nos transmissa demonstrat medium cœleste nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissimè contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum

Oculorum tum aeris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo Telescopiis evanescunt. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupilli spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos absque omni refractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in Cometis cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa: sic enim Cometa Anni 1680, Mense *Decembri*, quo tempore caput luce sua vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: postea *Jan. 27 & 28* caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissima, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulo ultra: ut supra dictum est. Sed & *Feb. 9. & 10* ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per Telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb. 28* hora 8½ P.M. *Londini*, versabatur in Piscium 8 *gr.* 41 cum latitudine boreali 28 *gr.* 6′, Sole existente in Capricorni 18 *gr.* 26′. Et Cometa Anni 1577 *Dec. 29.* versabatur in Piscium 8 *gr.* 41′ cum latitudine boreali 28 *gr.* 40′. Sole etiam existente in Capricorni 18 *gr.* 26′ circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum 4½ ab oppositione Solis Aquilonem versus; in posteriore verò (ex Observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, superest ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole aversas ascendere

confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus à Sole directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeò quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulò splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescit; vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aeris nostri. Nam aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 vicibus majus quam aqua ejusdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aeris ad summitatem Atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò (ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compresso aeris sit ut pondus Atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ locorum à centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, si ascendatur à superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quàm apud nos in ratione longe majori, quàm spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aeris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes Planetarum regiones ad usque sphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quàm superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatiis cœlestibus inque Cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde sufficere ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci

fere potest ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si rectà ascendat à Sole, ascendere cæpit à capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan. 25.* ascendere cæperat à capite ante *Decemb. 11.* adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec. 10.* apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrimè ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quàm ob nimiam suam tam à Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cælestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes à Sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, à radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus,

ideoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant à capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadunt, vel simul in ascensu suo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis aut aliis quibuscunque facillimè accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur quæ Cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui adusq; Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas

per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modò Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ distantiis, obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decem.* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mense *Novem.* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumq; viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigiensi Novem. 19.* Cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quàm postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidêre, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur quod materia

capitis sub initio copiosior esset & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, describantur subobscura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora septima Vesp. *R. P. Valentinus Estancius, Brasiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda verò supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mati reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id est gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput à Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1101 vel 1106, *cujus Stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis *Feb.* circa vesperam ad occasum Solis brumalem. Inde verò & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole,* inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens*. Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente verò die quantum potuit visum est. Nam quam minimâ fieri potest distantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii

Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometas esse genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores esse solent qui in orbibus minoribus & Soli proprioribus gyrantur, sie etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse & in orbibus minoribus revolvi rationi consentaneum videtur. Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens Lumen accendere potest.

Prop. XLII. Prob. XXI.

Trajectoriam Cometæ graphicè inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem graphicè inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maximè distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe à Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur per operationes Trigonometricas loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota $D + E$, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra): deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d + e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur *Q*. Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ quo area tota δ + ε describi debeat.

Jam sit *C* ad 1 ut *A* ad *B*, & *G* ad 1 ut *D* ad *E*, & *g* ad 1 ut *d* ad *e*, & γ ad 1 ut δ ad ε; sitque *S* tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis + & - probe observatis quærantur numeri *m* & *n*, ea lege ut sit $G - C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $T - S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et si, in operatione prima, *I* designet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & *K* longitudinem Nodi alterutrius: erit $I + nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates *R*, *r* & ρ designent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $1 \div L$, $1 \div l$, $1 \div \lambda$ ejusdem Latera transversa respectivè: erit $R + mr - mR + n\rho - nR$ verum Latus rectum, & $1 \div \{L + ml - mL + n\lambda - nL\}$ verum Latus transversum Trajectoriæ quàm Cometa describit. Dato autem Latere transverso datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

FINIS.

End of the Project Gutenberg EBook of Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, by Isaac Newton

*** END OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK PHILOSOPHIAE NATURALIS ***

***** This file should be named 28233-h.htm or 28233-h.zip *****
This and all associated files of various formats will be found in:
http://www.gutenberg.org/2/8/2/3/28233/

Produced by Jonathan Ingram, Keith Edkins and the Online Distributed Proofreading Team at http://www.pgdp.net

Updated editions will replace the previous one--the old editions will be renamed.

Creating the works from public domain print editions means that no one owns a United States copyright in these works, so the Foundation (and you!) can copy and distribute it in the United States without permission and without paying copyright royalties. Special rules, set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to copying and distributing Project Gutenberg-tm electronic works to protect the PROJECT GUTENBERG-tm concept and trademark. Project Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you charge for the eBooks, unless you receive specific

permission. If you
do not charge anything for copies of this eBook, complying with the
rules is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose
such as creation of derivative works, reports, performances and
research. They may be modified and printed and given away--you may do
practically ANYTHING with public domain eBooks. Redistribution is
subject to the trademark license, especially commercial
redistribution.

*** START: FULL LICENSE ***

THE FULL PROJECT GUTENBERG LICENSE
PLEASE READ THIS BEFORE YOU DISTRIBUTE OR USE THIS WORK

To protect the Project Gutenberg-tm mission of promoting the free
distribution of electronic works, by using or distributing this work
(or any other work associated in any way with the phrase "Project
Gutenberg"), you agree to comply with all the terms of the Full Project
Gutenberg-tm License (available with this file or online at
http://gutenberg.org/license).

Section 1. General Terms of Use and Redistributing Project Gutenberg-tm
electronic works

1.A. By reading or using any part of this Project Gutenberg-tm
electronic work, you indicate that you have read, understand, agree to
and accept all the terms of this license and intellectual property

(trademark/copyright) agreement. If you do not agree to abide by all the terms of this agreement, you must cease using and return or destroy all copies of Project Gutenberg-tm electronic works in your possession. If you paid a fee for obtaining a copy of or access to a Project Gutenberg-tm electronic work and you do not agree to be bound by the terms of this agreement, you may obtain a refund from the person or entity to whom you paid the fee as set forth in paragraph 1.E.8.

1.B. "Project Gutenberg" is a registered trademark. It may only be used on or associated in any way with an electronic work by people who agree to be bound by the terms of this agreement. There are a few things that you can do with most Project Gutenberg-tm electronic works even without complying with the full terms of this agreement. See paragraph 1.C below. There are a lot of things you can do with Project Gutenberg-tm electronic works if you follow the terms of this agreement and help preserve free future access to Project Gutenberg-tm electronic works. See paragraph 1.E below.

1.C. The Project Gutenberg Literary Archive Foundation ("the Foundation" or PGLAF), owns a compilation copyright in the collection of Project Gutenberg-tm electronic works. Nearly all the individual works in the collection are in the public domain in the United States. If an individual work is in the public domain in the United States and you are located in the United States, we do not claim a right to

prevent you from
copying, distributing, performing, displaying or creating derivative
works based on the work as long as all references to Project Gutenberg
are removed. Of course, we hope that you will support the Project
Gutenberg-tm mission of promoting free access to electronic works by
freely sharing Project Gutenberg-tm works in compliance with the terms of
this agreement for keeping the Project Gutenberg-tm name associated with
the work. You can easily comply with the terms of this agreement by
keeping this work in the same format with its attached full Project
Gutenberg-tm License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern
what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in
a constant state of change. If you are outside the United States, check
the laws of your country in addition to the terms of this agreement
before downloading, copying, displaying, performing, distributing or
creating derivative works based on this work or any other Project
Gutenberg-tm work. The Foundation makes no representations concerning
the copyright status of any work in any country outside the United
States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate
access to, the full Project Gutenberg-tm License must

appear prominently
whenever any copy of a Project Gutenberg-tm work (any work on which the
phrase "Project Gutenberg" appears, or with which the phrase "Project
Gutenberg" is associated) is accessed, displayed, performed, viewed,
copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with
almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or
re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included
with this eBook or online at www.gutenberg.org

1.E.2. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is derived
from the public domain (does not contain a notice indicating that it is
posted with permission of the copyright holder), the work can be copied
and distributed to anyone in the United States without paying any fees
or charges. If you are redistributing or providing access to a work
with the phrase "Project Gutenberg" associated with or appearing on the
work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1
through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the
Project Gutenberg-tm trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or
1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is posted
with the permission of the copyright holder, your use and distribution
must comply with both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional
terms imposed by the copyright holder. Additional terms

will be linked
to the Project Gutenberg-tm License for all works posted with the
permission of the copyright holder found at the beginning of this work.

1.E.4. Do not unlink or detach or remove the full Project Gutenberg-tm
License terms from this work, or any files containing a part of this
work or any other work associated with Project Gutenberg-tm.

1.E.5. Do not copy, display, perform, distribute or redistribute this
electronic work, or any part of this electronic work, without
prominently displaying the sentence set forth in paragraph 1.E.1 with
active links or immediate access to the full terms of the Project
Gutenberg-tm License.

1.E.6. You may convert to and distribute this work in any binary,
compressed, marked up, nonproprietary or proprietary form, including any
word processing or hypertext form. However, if you provide access to or
distribute copies of a Project Gutenberg-tm work in a format other than
"Plain Vanilla ASCII" or other format used in the official version
posted on the official Project Gutenberg-tm web site (www.gutenberg.org),
you must, at no additional cost, fee or expense to the user, provide a
copy, a means of exporting a copy, or a means of obtaining a copy upon
request, of the work in its original "Plain Vanilla ASCII" or other
form. Any alternate format must include the full Project Gutenberg-tm
License as specified in paragraph 1.E.1.

1.E.7. Do not charge a fee for access to, viewing, displaying,
performing, copying or distributing any Project Gutenberg-tm works
unless you comply with paragraph 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.8. You may charge a reasonable fee for copies of or providing
access to or distributing Project Gutenberg-tm electronic works provided
that

- You pay a royalty fee of 20% of the gross profits you derive from
the use of Project Gutenberg-tm works calculated using the method
you already use to calculate your applicable taxes. The fee is
owed to the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, but he
has agreed to donate royalties under this paragraph to the
Project Gutenberg Literary Archive Foundation. Royalty payments
must be paid within 60 days following each date on which you
prepare (or are legally required to prepare) your periodic tax
returns. Royalty payments should be clearly marked as such and
sent to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation at the
address specified in Section 4, "Information about donations to
the Project Gutenberg Literary Archive Foundation."

- You provide a full refund of any money paid by a user who notifies
you in writing (or by e-mail) within 30 days of receipt that s/he
does not agree to the terms of the full Project Gutenberg-tm
License. You must require such a user to return or

destroy all copies of the works possessed in a physical medium
and discontinue all use of and all access to other copies of
Project Gutenberg-tm works.

- You provide, in accordance with paragraph 1.F.3, a full refund of any
money paid for a work or a replacement copy, if a defect in the
electronic work is discovered and reported to you within 90 days
of receipt of the work.

- You comply with all other terms of this agreement for free
distribution of Project Gutenberg-tm works.

1.E.9. If you wish to charge a fee or distribute a Project Gutenberg-tm
electronic work or group of works on different terms than are set
forth in this agreement, you must obtain permission in writing from
both the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and Michael
Hart, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark. Contact the
Foundation as set forth in Section 3 below.

1.F.

1.F.1. Project Gutenberg volunteers and employees expend considerable
effort to identify, do copyright research on, transcribe and proofread
public domain works in creating the Project Gutenberg-tm
collection. Despite these efforts, Project Gutenberg-tm electronic
works, and the medium on which they may be stored, may contain
"Defects," such as, but not limited to, incomplete, inaccurate or
corrupt data, transcription errors, a copyright or other

intellectual
property infringement, a defective or damaged disk or other medium, a
computer virus, or computer codes that damage or cannot be read by
your equipment.

1.F.2. LIMITED WARRANTY, DISCLAIMER OF DAMAGES - Except for the "Right
of Replacement or Refund" described in paragraph 1.F.3, the Project
Gutenberg Literary Archive Foundation, the owner of the Project
Gutenberg-tm trademark, and any other party distributing a Project
Gutenberg-tm electronic work under this agreement, disclaim all
liability to you for damages, costs and expenses, including legal
fees. YOU AGREE THAT YOU HAVE NO REMEDIES FOR NEGLIGENCE, STRICT
LIABILITY, BREACH OF WARRANTY OR BREACH OF CONTRACT EXCEPT THOSE
PROVIDED IN PARAGRAPH F3. YOU AGREE THAT THE FOUNDATION, THE
TRADEMARK OWNER, AND ANY DISTRIBUTOR UNDER THIS AGREEMENT WILL NOT BE
LIABLE TO YOU FOR ACTUAL, DIRECT, INDIRECT, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE OR
INCIDENTAL DAMAGES EVEN IF YOU GIVE NOTICE OF THE POSSIBILITY OF SUCH
DAMAGE.

1.F.3. LIMITED RIGHT OF REPLACEMENT OR REFUND - If you discover a
defect in this electronic work within 90 days of receiving it, you can
receive a refund of the money (if any) you paid for it by sending a
written explanation to the person you received the work from. If you
received the work on a physical medium, you must return the medium with
your written explanation. The person or entity that

provided you with the defective work may elect to provide a replacement copy in lieu of a refund. If you received the work electronically, the person or entity providing it to you may choose to give you a second opportunity to receive the work electronically in lieu of a refund. If the second copy is also defective, you may demand a refund in writing without further opportunities to fix the problem.

1.F.4. Except for the limited right of replacement or refund set forth in paragraph 1.F.3, this work is provided to you 'AS-IS' WITH NO OTHER WARRANTIES OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO WARRANTIES OF MERCHANTIBILITY OR FITNESS FOR ANY PURPOSE.

1.F.5. Some states do not allow disclaimers of certain implied warranties or the exclusion or limitation of certain types of damages. If any disclaimer or limitation set forth in this agreement violates the law of the state applicable to this agreement, the agreement shall be interpreted to make the maximum disclaimer or limitation permitted by the applicable state law. The invalidity or unenforceability of any provision of this agreement shall not void the remaining provisions.

1.F.6. INDEMNITY - You agree to indemnify and hold the Foundation, the trademark owner, any agent or employee of the Foundation, anyone providing copies of Project Gutenberg-tm electronic works in accordance with this agreement, and any volunteers associated with the production,

promotion and distribution of Project Gutenberg-tm electronic works,
harmless from all liability, costs and expenses, including legal fees,
that arise directly or indirectly from any of the following which you do
or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg-tm
work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any
Project Gutenberg-tm work, and (c) any Defect you cause.

Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg-tm

Project Gutenberg-tm is synonymous with the free distribution of
electronic works in formats readable by the widest variety of computers
including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists
because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from
people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the
assistance they need, are critical to reaching Project Gutenberg-tm's
goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will
remain freely available for generations to come. In 2001, the Project
Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure
and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations.
To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation
and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4
and the Foundation web page at http://www.pglaf.org.

Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive
Foundation

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit
501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the
state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal
Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification
number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at
http://pglaf.org/fundraising. Contributions to the Project Gutenberg
Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent
permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S.
Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered
throughout numerous locations. Its business office is located at
809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email
business@pglaf.org. Email contact links and up to date contact
information can be found at the Foundation's web site and official
page at http://pglaf.org

For additional contact information:
Dr. Gregory B. Newby
Chief Executive and Director
gbnewby@pglaf.org

Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg
Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations ($1 to $5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit http://pglaf.org

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg Web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: http://pglaf.org/donate

Section 5. General Information About Project Gutenberg-tm electronic works.

Professor Michael S. Hart is the originator of the Project Gutenberg-tm concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For thirty years, he produced and distributed Project Gutenberg-tm eBooks with only a loose network of volunteer support.

Project Gutenberg-tm eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as Public Domain in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our Web site which has the main PG search facility:

http://www.gutenberg.org

This Web site includes information about Project Gutenberg-tm, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks,

and how to
subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.